

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Departamento de Ecuaciones Funcionales



TESIS DOCTORAL

Bifurcaciones causadas por variación del dominio en problemas elípticos

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

José Manuel Vegas Montaner

DIRECTOR:

Alfonso Casal Piga

Madrid, 2015



x-53-167013-8

José Manuel Vegas Montaner

**BIFURCACIONES CAUSADAS POR VARIACION DEL DOMINIO
EN PROBLEMAS ELIPTICOS**

Departamento de Ecuaciones Funcionales
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
1983



BIBLIOTECA

Colección Tesis Doctorales. Nº

132/83

© José Manuel Vegas Montaner
Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Noviciado, 3 Madrid-8
Madrid, 1983
Xerox 9200 XB 480
Depósito Legal: M-18056-1983

BIFURCACIONES CAUSADAS POR VARIACION DEL DOMINIO
EN PROBLEMAS ELIPTICOS

AUTOR: JOSE MANUEL VEGAS MONTANER

DIRECTOR DE TESIS: Dr. D. ALFONSO CASAL PIGA

DEPARTAMENTO DE ECUACIONES DIFERENCIALES

FACULTAD DE MATEMATICAS

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

MADRID - 1.981

AGRADECIMIENTO

En primer lugar, debo mi más profunda gratitud al profesor Jack K. Hale por su constante orientación, dedicación e interés por mi trabajo, y, sobre todo, porque sus enseñanzas han sido decisivas para mi formación. Agradezco también a los profesores C. Dafermos, E. Infante y W. Fleming de Brown University su disposición para responder a mis preguntas sobre diversos puntos de este trabajo.

Aunque esta tesis fue elaborada durante mi estancia en la Division of Applied Mathematics de Brown University, es un placer para mí hacer constar que tanto la formación que recibí a través de los cursos de licenciatura y doctorado en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense, como los estudios que realicé como miembro del Departamento de Ecuaciones Funcionales de la citada facultad, fueron y son una de mis mayores ayudas y, de hecho, me orientaron hacia el campo de especialización del que es parte esta memoria. Estos estudios estuvieron dirigidos por el profesor Alfonso Casal Piga, cuya intervención personal propició mi aceptación en Brown, y a quien agradezco, entre muchas otras cosas, su constante apoyo, tanto desde la Complutense como en la propia Brown durante la etapa final de la realización de este trabajo.

III

INDICE

CAPITULO	PAGINA
INTRODUCCION	1
I. LA ECUACION DE EVOLUCION	6
I.1	6
I.1.1 Notación	6
I.1.2 El Teorema de la Función Implícita ...	8
I.1.3 El método de Liapunov-Schmidt	8
I.2 Resultados sobre espacios de Sobolev	9
I.2.1 El teorema de inclusión de Sobolev y el lema de Rellich	9
I.2.2 Operadores de extensión	10
I.2.3 Operadores de sustitución	11
I.3 Ecuaciones elípticas	12
I.4 Ecuaciones de evolución	14
II. FORMULACION DEL PROBLEMA. EL METODO DE LIAPUNOV- SCHMIDT	18
II.1 El problema	18
II.2 El método de Liapunov-Schmidt	19
III. LOS DOMINIOS Ω_ϵ Y SUS PROPIEDADES BASICAS	24
III.1 Los dominios Ω_ϵ	24
III.2 Propiedades básicas de los dominios Ω_ϵ ...	27

IV

III.3	Convergencia de familias de funciones ...	34
III.4	Estimaciones sobre autovalores y autofunciones	40
III.5	Continuidad (en ϵ) de los operadores \hat{K}_ϵ .	49
III.6	Nota bibliográfica	56
IV.	REGULARIDAD DE LAS ECUACIONES DE BIFURCACION ...	58
IV.1	Enunciado del teorema de continuidad ...	58
IV.2	Continuidad de \hat{u} en ϵ	59
IV.3	Continuidad de G, H en ϵ	68
V.	EL CASO HIPERBOLICO	69
V.1	Caracterización de las soluciones de $S(\lambda, 0)$	69
V.2	El caso hiperbólico	70
V.3	Estabilidad de las soluciones	72
VI.	EL CASO CRITICO CON FUNCION SIMETRICA	76
VI.1	Introducción	76
VI.2	Formulación del problema con dos parámetros	77
VI.3	Acotaciones a priori y cambio de escala .	79
VI.4	Las curvas de bifurcación bajo hipótesis de simetría	84
VI.4.1	El caso $g(-u) = -g(u)$	94
VI.4.2	El caso $g(-u) = g(u)$	106

VII.	EL CASO CRITICO CON FUNCION NO SIMETRICA	115
VII.1	Acotación a priori	116
VII.2	Eliminación de s	117
VII.3	Eliminación de a	135
VII.4	Eliminación de λ	144
VII.5	Estabilidad de las soluciones	144
VIII.	APLICACION A UN MODELO DE SELECCION GENETICA CON MIGRACION	148
IX.	GENERALIZACIONES Y PROBLEMAS ABIERTOS	155
	BIBLIOGRAFIA	158

1. The first part of the document is a list of the names of the persons who have been appointed to the various offices of the city of New York.

2. The second part of the document is a list of the names of the persons who have been appointed to the various offices of the city of New York.

3. The third part of the document is a list of the names of the persons who have been appointed to the various offices of the city of New York.

4. The fourth part of the document is a list of the names of the persons who have been appointed to the various offices of the city of New York.

5. The fifth part of the document is a list of the names of the persons who have been appointed to the various offices of the city of New York.

6. The sixth part of the document is a list of the names of the persons who have been appointed to the various offices of the city of New York.

7. The seventh part of the document is a list of the names of the persons who have been appointed to the various offices of the city of New York.

8. The eighth part of the document is a list of the names of the persons who have been appointed to the various offices of the city of New York.

9. The ninth part of the document is a list of the names of the persons who have been appointed to the various offices of the city of New York.

10. The tenth part of the document is a list of the names of the persons who have been appointed to the various offices of the city of New York.

11. The eleventh part of the document is a list of the names of the persons who have been appointed to the various offices of the city of New York.

12. The twelfth part of the document is a list of the names of the persons who have been appointed to the various offices of the city of New York.

13. The thirteenth part of the document is a list of the names of the persons who have been appointed to the various offices of the city of New York.

14. The fourteenth part of the document is a list of the names of the persons who have been appointed to the various offices of the city of New York.

15. The fifteenth part of the document is a list of the names of the persons who have been appointed to the various offices of the city of New York.

16. The sixteenth part of the document is a list of the names of the persons who have been appointed to the various offices of the city of New York.

17. The seventeenth part of the document is a list of the names of the persons who have been appointed to the various offices of the city of New York.

18. The eighteenth part of the document is a list of the names of the persons who have been appointed to the various offices of the city of New York.

INTRODUCCION

La ecuación de evolución

$$(E) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(u) & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, \infty) \end{cases}$$

desempeña un papel muy importante en matemática aplicada, ya que aparece en procesos físicos (conducción no lineal del calor, combustión), biológicos (dinámica demográfica, conducción de impulsos nerviosos, modelos ecológicos), químicos (procesos de reacción-difusión), etc. La condición $\partial u / \partial n = 0$ indica que la magnitud u considerada se encuentra en un ambiente aislado de influencias exteriores. La ecuación diferencial ordinaria $\dot{u} = f(u)$, llamada "ecuación cinética" o "ecuación de reacción", rige la evolución del proceso cuando u está distribuida homogéneamente en el espacio. El término " Δu " señala la presencia de un mecanismo de difusión que tiende a "homogeneizar" distribuciones no homogéneas alrededor de su valor medio, en ausencia del término cinético $f(u)$. El interés en el estudio de la ecuación (E) reside, precisamente, en la interacción entre ambos mecanismos, planteándose inmediatamente el problema de decidir cuál de ellos ejerce más influencia: si es el de difusión, la distribución a largo plazo de u será prácticamente homogénea, mientras que si el mecanismo más pode-

roso es el de reacción, una distribución inicialmente no homogénea podría mantener su forma asimétrica todo el tiempo.

Siempre que se estudia el comportamiento a largo plazo de un sistema dinámico, el concepto de estabilidad se presenta inmediatamente, ya que los movimientos estables son los únicos que tienen relevancia física. Sin embargo, la localización de ciertos movimientos inestables juega un papel muy importante en la descripción del proceso evolutivo, puesto que suelen representar "líneas divisorias" o "separatrices" en el espacio de fases.

Como (E) tiene estructura de sistema gradiente, no puede haber ciclos límite o cualquier otro tipo de movimiento dependiente del tiempo que represente el estado asintótico del sistema. Por tanto, hemos de considerar exclusivamente las soluciones estacionarias de (E) y su estabilidad.

En [32], Chafee demostró que si Ω es un intervalo unidimensional acotado, las únicas soluciones estacionarias de (E) que son estables son las homogéneas, o sea $u = \text{constante}$ en Ω . Casten y Holland [7] y Matano [23], independientemente, extendieron la validez de este resultado al caso en que Ω es un dominio convexo en el espacio n -dimensional. Estos resultados no dependen del término no lineal $f(u)$. Simultáneamente, Matano demostró, construyendo ejemplos específicos, que en ciertos dominios no convexos aparecen soluciones estables con distribución espacial no homogénea.

Con objeto de estudiar analíticamente la transición entre los dos tipos de comportamiento que acabamos de describir, consideraremos

$$(E_\epsilon) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} = \Delta u_\epsilon + f(u_\epsilon) & \text{en } \Omega_\epsilon \times (0, \infty) \\ \frac{\partial u_\epsilon}{\partial n} = 0 & \text{en } \partial\Omega_\epsilon \times (0, \infty) \end{cases}$$

donde Ω_ϵ es una familia de dominios conexos y acotados que se "contrae" (cuando $\epsilon \rightarrow 0$) a un dominio Ω_0 que consta de dos componentes conexas, Ω_0^L y Ω_0^R ; Ω_ϵ puede considerarse como el resultado de adosar un "puente" de amplitud ϵ entre Ω_0^L y Ω_0^R . Bajo ciertas hipótesis, la condición de Matano para la existencia de soluciones estables no homogéneas se satisface para valores pequeños de ϵ , mientras que la condición de convexidad corresponde a valores grandes de ϵ .

Este planteamiento sugiere dos cosas: (1) las soluciones estables no homogéneas de Matano podrían obtenerse a partir de ciertas soluciones "triviales" para $\epsilon = 0$ (por ejemplo, funciones localmente constantes en Ω_0) empleando algún método de perturbación; (2) la no existencia de tales soluciones para valores grandes de ϵ implica la presencia de algún fenómeno de bifurcación, por el cual haya ciertos cambios en la estabilidad de las soluciones, o en su número (o ambas cosas a la vez). Este aspecto del problema fue discutido por Hale [17] de forma intuitiva.

Por tanto, hemos de resolver dos problemas: primero, construir algún método para estudiar familias de dominios del tipo Ω_ϵ ; segundo, plantear el problema dentro del marco de la teoría de bifurcación, es decir, obtener un problema equivalente (las "ecuaciones de bifurcación", por el método de Liapunov-Schmidt) que pueda tratarse con técnicas ya establecidas y más o menos clásicas.

Este trabajo está organizado de la siguiente forma:

El Capítulo I contiene los resultados básicos relacionados con la ecuación de evolución (E).

En el Capítulo II presentamos la aplicación del método de Liapunov-Schmidt a nuestro problema.

En el Capítulo III describimos los dominios Ω_ϵ y demostramos sus propiedades básicas. Definimos también un concepto de convergencia de funciones con índice ϵ , por el cual se demuestra la siguiente propiedad de clausura: Si u_ϵ son soluciones de (E_ϵ) y $u_\epsilon \rightarrow u_{\epsilon_0}$, entonces u_{ϵ_0} es solución de (E_{ϵ_0}) .

Esta propiedad es esencial para probar la regularidad de las ecuaciones de bifurcación obtenidas en el Capítulo II; este es el objetivo del Capítulo IV.

En el Capítulo V consideramos el caso llamado hiperbólico, en el cual todos los ceros de f son simples. En particular, obtenemos soluciones estables no homogéneas como per-

turbaciones de soluciones estables localmente constantes de (E_0) , y, de hecho, obtenemos también las soluciones inestables. Por tanto, la cuestión (1) planteada más arriba se resuelve afirmativamente.

En el capítulo VI estudiamos el caso $f(u) = \lambda u - g(u)$, donde λ es un pequeño parámetro y $g(\cdot)$ tiene un cero múltiple en $u=0$, y es simétrica (par o impar). Bajo ciertas hipótesis de simetría de los dominios, obtenemos el diagrama de soluciones en función de λ y demostramos la existencia de bifurcaciones secundarias.

En el Capítulo VII examinamos el caso $f(u) = \lambda u - au^2 - u^3$ como un problema con tres parámetros, "mezcla" de los casos "g par" y "g impar" del Capítulo VI.

En el Capítulo VIII presentamos una aplicación de los resultados obtenidos a un modelo de selección natural y migración combinadas, en el ámbito de la genética de poblaciones.

El Capítulo IX incluye algunos problemas abiertos y generalizaciones.

CAPITULO I

LA ECUACION DE EVOLUCION

En este capítulo se incluye la notación y los resultados básicos que afectan directamente a nuestro problema. La mayor parte de estos resultados son conocidos; los enunciados han sido adaptados a nuestro objetivo y las demostraciones han sido omitidas.

I.1I.1.1 Notación

\mathbb{R} denota el cuerpo de los números reales; \mathbb{R}^n es el espacio euclídeo n -dimensional con producto escalar "...". $x = (x_1, \dots, x_n)$ representa un punto genérico en \mathbb{R}^n .

Ω (con subíndices o superíndices) representa un conjunto abierto de \mathbb{R}^n , con frontera $\partial\Omega$.

$|A|$ denota la medida de Lebesgue del conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$.

Dada una función u definida en un subconjunto de \mathbb{R}^n , u_{x_i} ó $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ representa su derivada parcial con respecto a x_i (si existe). Si u depende de $n+1$ variables y $x_{n+1} = t$ (el "tiempo"), el gradiente $\nabla u = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$ se refiere siempre a las variables espaciales; lo mismo con la laplaciana

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

Ω es un dominio regular si $\partial\Omega$ es una variedad diferenciable de clase C^∞ y Ω está localmente de un lado de $\partial\Omega$. En tal caso, el vector normal unitario en $x \in \partial\Omega$ se indica $n(x)$, y $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u(x) \cdot n(x)$ se llama derivada normal.

$L^p(\Omega)$ representa el espacio de Banach de funciones medibles en Ω con norma $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f|^p \right)^{1/p}$. Cuando $p=2$, el producto escalar asociado se indica $\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)}$.

$W^{m,p}(\Omega)$ representa el espacio de Sobolev de funciones medibles en Ω con derivadas en el sentido de distribuciones en $L^p(\Omega)$ hasta el orden m inclusive, cuya norma es

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{r_1 + \dots + r_n \leq m} \left\| \frac{\partial^{r_1 + \dots + r_n} u}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

$W^{m,2}(\Omega)$ se escribirá $H^m(\Omega)$. El producto escalar en $H^m(\Omega)$ se denota $\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)}$.

$C^k(\Omega)$ es el conjunto de funciones con derivadas continuas hasta el orden k en Ω . $C^k(\bar{\Omega})$ es el conjunto de restricciones a $\bar{\Omega}$ de $C^k(\mathbb{R}^n)$.

I.1.2 El Teorema de la Función Implícita

Proposición I.1.2: Sean X, Y, Z espacios de Banach. Supongamos que $f(x,y)$ es una aplicación continua de un entorno U de (x_0, y_0) en $X \times Y$ en Z , $f(x_0, y_0) = 0$, y $f_y(x, y)$ existe y es continua en U , y $f_y(x_0, y_0)$ tiene inversa acotada. Entonces existe una única función g definida en un entorno U_1 de x_0 con valores en Y tal que $g(x_0) = y_0$ y $f(x, g(x)) = 0$ para todo $x \in U_1$. Además, si f es C^k en U , entonces g es también C^k en U_1 .

Demostración: Véase Berger [6].

I.1.3 El método de Liapunov-Schmidt

Sean Λ, X, Y espacios de Banach, $F: \Lambda \times X \rightarrow Y$ una aplicación continua de un entorno U de $(0, 0) \in \Lambda \times X$ en Y tal que $F_x(\lambda, x)$ existe y es continua en U y $\dim N(F_x(0, 0)) < \infty$, $\text{codim } R(F_x(0, 0)) < \infty$. (N y R indican núcleo y rango, respectivamente). Sean $P: X \rightarrow N(F_x(0, 0))$, $Q: Y \rightarrow R(F_x(0, 0))$ proyecciones. Entonces, la ecuación $F(\lambda, x) = 0$ es equivalente a

$$\begin{cases} QF(\lambda, x) = 0 \\ (I-Q)F(\lambda, x) = 0 \end{cases}$$

Expresemos $x = a + \hat{x}$, $a = Px$, $\hat{x} = (I-P)x$. Entonces, la aplicación $QF_x(0, 0)(I-P): (I-P)X \rightarrow QY$ tiene inversa aco-

tada, y, por el Teorema de la Función Implícita,

$$QF(\lambda, a + \hat{x}) = 0$$

tiene solución única $\hat{x} = \hat{x}(\lambda, a)$. Sustituyendo en la segunda ecuación, definimos la Ecuación de Bifurcación

$$G(\lambda, a) \stackrel{\text{def}}{=} (I - Q)F(\lambda, a + \hat{x}(\lambda, a)) = 0$$

Esta ecuación tiene lugar en un espacio de dimensión finita y es equivalente al problema original en un entorno de $x = 0$.

Nota: No es preciso que F_x exista en el sentido de Fréchet y sea continua. Lo único necesario es que sea un operador de Fredholm. Véase Berger [6].

I.2 Resultados sobre espacios de Sobolev

Se dice que un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tiene la propiedad del cono si existe un cono finito C tal que cada punto x de Ω es el vértice de un cono finito C_x contenido en Ω y congruente con C .

Teorema I.2.1 (Teorema de inclusión de Sobolev y lema de Rellich)

Sea Ω un dominio en \mathbb{R}^n que satisface la propiedad del cono. Entonces se dan las siguientes inclusiones:

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \text{si } 2m < n, \quad p \leq q \leq \frac{2n}{n-2m}$$

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \text{si } 2 = n, \quad p \leq q < \infty.$$

Si Ω es acotado, estas inclusiones son compactas para $p \leq q < \frac{2n}{n-2m}$.

Demostración: Véase Adams [2].

1.2.2 Operadores de extensión

Una aplicación lineal E que transforma funciones definidas en Ω en funciones definidas en \mathbb{R}^n es un operador de extensión total si E aplica $W^{m,p}(\Omega)$ en $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ de forma continua, para cada p , $1 \leq p < \infty$ y cada entero $m \geq 0$, y además $Eu(x) = u(x)$ para casi todo $x \in \Omega$.

Un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ es un "dominio especial de Lipschitz" (Stein, [28]) si existe una función de Lipschitz $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $|\varphi(x) - \varphi(x')| \leq M|x - x'|$, tal que $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}, y > \varphi(x)\}$. La constante de Lipschitz de φ se denomina cota de D .

Sea D un abierto de \mathbb{R}^n . Se dice que D es mínimamente regular ("minimally smooth", Stein [28]) si existen $\varepsilon > 0$, un entero N , una constante $M > 0$ y una sucesión U_1, U_2, \dots de conjuntos abiertos tales que:

- (i) Si $x \in \partial D$, entonces $\{y: |x - y| < \varepsilon\} \subset U_i$ para algún i .
- (ii) Ningún punto de \mathbb{R}^n está contenido en más de N miembros de la sucesión U_1, U_2, \dots .
- (iii) Para cada i existe una rotación D_i de un dominio especial de Lipschitz D_i^* cuya cota no excede M tal que $U_i \cap D = U_i \cap D_i$.

Teorema 1.2.2.1 Si D es un abierto cuya frontera es mínimamente regular, entonces existe un operador de extensión total para D .

Demostración: Véase Stein [28].

I.2.3 Operadores de sustitución (o "de Nemytskii")

Proposición I.2.3.1 Sea Ω un dominio regular y acotado, y supongamos que $f(y_1, \dots, y_k)$ satisface

$$|f(y_1, \dots, y_k)| \leq c \left\{ 1 + \sum_{|\alpha|=0}^m |y_\alpha|^{\sigma_\alpha} \right\}$$

Entonces, $u \mapsto f(u, D^\alpha u)$ define una aplicación acotada y continua de $W^{m,p}(\Omega)$ en $L^s(\Omega)$ si los σ_α satisfacen

$$\sigma_\alpha < \frac{1}{s} \left\{ \frac{1}{p} - \frac{m-|\alpha|}{n} \right\}^{-1}$$

Demostración: Véase Berger [6] o Krasnosel'skii [20].

Proposición I.2.3.2 Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^k tal que f y todas sus derivadas hasta el orden k están mayoradas por polinomios. Entonces, si Ω es un dominio bidimensional regular y acotado, la aplicación $u \mapsto f(u)$ es de clase C^k de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$.

Demostración: Consideremos las derivadas formales $f^{(j)}(u)v^j$ como aplicaciones multilineales de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$; entonces

$$\|f^{(j)}(u_1) - f^{(j)}(u_2)\|_{\mathcal{L}^j(H^1(\Omega), L^2(\Omega))} \leq \|f^{(j)}(u_1) - f^{(j)}(u_2)\|_{L^4(\Omega)}$$

$\rightarrow 0$ cuando $u_1 \rightarrow u_2$ en $H^1(\Omega)$, por la proposición anterior y la hipótesis de crecimiento polinómico. Basta ahora aplicar el "teorema inverso de Taylor" (véase Abraham and Robbin [1]).

I.3 Ecuaciones elípticas

En la siguiente presentación consideraremos únicamente el operador laplaciano Δ con condición de contorno de tipo Neumann.

$-\Delta$ se define como la aplicación lineal $H^1(\Omega) \rightarrow (H^1(\Omega))^*$ siguiente:

$$\langle -\Delta u, v \rangle_{(H^1(\Omega))^*, H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \quad v \in H^1(\Omega).$$

$\mathcal{D}(\Delta)$ es, por definición, $\{u \in H^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$; puede demostrarse (Lions y Magenes [21]) que si Ω es acotado y regular, tenemos $\mathcal{D}(\Delta) = \{u \in H^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ en } \partial\Omega\}$, y $-\Delta$ es un operador autoadjunto no negativo en $L^2(\Omega)$.

Consideremos la ecuación $-\Delta u = \lambda u + f$, con $f \in L^2(\Omega)$. Una formulación equivalente es

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \lambda \int_{\Omega} uv + \int_{\Omega} fv, \quad v \in H^1(\Omega).$$

Proposición I.3.1.1 Sea Ω un dominio acotado y regular en \mathbb{R}^n . Existe una sucesión $\sigma = \{\lambda_k\}$; $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow \infty$ tal que, para cada $\lambda \notin \sigma$, la ecuación $-\Delta u = \lambda u + f$ tiene solución única para cada $f \in L^2(\Omega)$; el operador así definido $(\Delta + \lambda I)^{-1}$ es compacto de $L^2(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$.

Cada $\lambda \in \sigma$ es un autovalor, es decir, $N(\Delta + \lambda I) \neq 0$, y $N(\Delta + \lambda I)$ tiene dimensión finita. Las autofunciones w_k constituyen un sistema ortonormal completo en $L^2(\Omega)$ y si en la or-

denación de los autovalores repetimos cada uno de ellos tantas veces como indica $\dim N(\Delta + \lambda I)$ (llamada multiplicidad del autovalor), entonces tenemos la siguiente caracterización variacional:

$$\lambda^{(k)}(\Omega) = \min \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 / \int_{\Omega} u^2 : u \in H^1(\Omega), u \neq 0, \int_{\Omega} w_j u = 0, 1 \leq j \leq k-1 \right\}$$

donde $\lambda^{(k)}(\Omega)$ representa el k -simo autovalor y w_k la correspondiente autofunción.

Además, si $f \in L^2(\Omega)$ y λ es un autovalor, con

$N(\Delta + \lambda I) =$ subespacio engendrado por $\{v_1, \dots, v_r\}$, entonces

$-\Delta u = \lambda u + f$ tiene solución si y sólo si $\int_{\Omega} f v_j = 0, 1 \leq j \leq r$

("alternativa de Fredholm") y, en tal caso, hay una única solución que satisface $\int_{\Omega} u v_j = 0, 1 \leq j \leq r$. Por tanto, $\Delta + \lambda I$

tiene inversa acotada cuando lo consideramos restringido al subespacio ortogonal a $N(\Delta + \lambda I)$.

Demostración: Véase, por ejemplo, Courant y Hilbert 9 o Agmon 3.

Proposición 1.3.2 (Desigualdad de Poincaré)

Para cada $u \in H^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \geq \lambda^{(2)}(\Omega) \left\{ \int_{\Omega} u^2 - \frac{1}{|\Omega|} \left(\int_{\Omega} u \right)^2 \right\}$$

Demostración: Es una consecuencia inmediata de la caracterización variacional de $\lambda^{(2)}(\Omega)$.

Las soluciones u de problemas del tipo $-\Delta u = f \in (H^1)^*$ se llaman soluciones débiles. Hemos indicado antes que $f \in L^2(\Omega)$ implica $u \in H^2(\Omega)$; estas soluciones se llaman fuertes. A continuación vamos a demostrar un resultado que implica, en particular, que las autofunciones son de clase $C^\infty(\bar{\Omega})$ si Ω es un dominio regular y acotado; también puede aplicarse a problemas no lineales con datos regulares.

Proposición I.3.3 Sean Ω un dominio regular y acotado en \mathbb{R}^2 , y $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^∞ tal que f y todas sus derivadas crecen polinómicamente. Entonces, cualquier solución de $-\Delta u = f(u)$ es de clase $C^\infty(\bar{\Omega})$.

Demostración: Observemos en primer lugar que las hipótesis implican $f(u) \in (H^1(\Omega))^*$, y, por tanto, el problema planteado tiene sentido. Ahora bien, estas mismas hipótesis implican también $f(u) \in L^2(\Omega)$, y entonces $u \in H^2(\Omega)$. Por el teorema de inclusión de Sobolev (véase Adams [2]), u pertenece a cierta clase de Hölder $C^\infty(\bar{\Omega})$, y podemos aplicar los resultados de la teoría de Schauder (véase, por ejemplo, Agmon, Douglis y Nirenberg [4]).

I.4 Ecuaciones de evolución

Consideremos

$$(E) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(u) & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, \infty) \end{cases}$$

Si f es una función regular (C^∞), hay muchos espacios funcionales $X(\Omega)$ en los cuales la ecuación (E) define un semigrupo no lineal, es decir: Para cada $\varphi \in X(\Omega)$, existen $T > 0$ y $u: [0, T] \rightarrow X(\Omega)$ tales que $u(t) \in \mathcal{D}(\Delta)$ para $t > 0$, u es de clase C^1 en $(0, T)$, $u(t) \rightarrow \varphi$ en $X(\Omega)$ cuando $t \rightarrow 0$, y u satisface (E) para cada $t \in (0, T)$.

Friedman [14] contiene una descripción de los diferentes espacios $X(\Omega)$ a los cuales se puede aplicar este resultado; como ejemplos típicos tenemos los dominios de las potencias fraccionarias del operador sectorial $-\Delta$.

El hecho de que $u(t)$ pertenece a $\mathcal{D}(\Delta)$ ($t > 0$) incluso en el caso de que $u(0) \notin \mathcal{D}(\Delta)$ recibe el nombre de acción regularizante de la ecuación de evolución (E). Por tanto, si nuestro interés se centra exclusivamente en el comportamiento asintótico de $u(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$ y en resultados cualitativos, la elección del espacio funcional $X(\Omega)$ no reviste tanta importancia. En este trabajo nos limitaremos a considerar un caso particular, suficiente para nuestros objetivos. La presentación está tomada de Matano [23].

Proposición I.4.1 Sean Ω un dominio regular y acotado, y f una función regular. Entonces, para cada $t \geq 0$ existe un operador no lineal $Q(t): \mathcal{D}(Q(t)) \subset L^\infty(\Omega) \cap C^0(\Omega) \rightarrow L^\infty(\Omega) \cap C^0(\Omega)$ tal que $Q(0) = I$, $\mathcal{D}(Q(t_1)) \supset \mathcal{D}(Q(t_2))$ si $t_1 \leq t_2$, $Q(t_2) = Q(t_2 - t_1)Q(t_1)$ si $0 \leq t_1 \leq t_2$, y, para cada $\varphi \in L^\infty(\Omega) \cap C^0(\Omega)$, $Q(t)\varphi$ es una solución de (E) en sentido clásico;

$Q(\cdot)\varphi \in C((0, t_1]; C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)) \cap C^1((0, t_1]; C^1(\bar{\Omega}))$.

Dado un espacio funcional $X(\Omega)$, definimos el conjunto ω -límite como $\omega(X/\varphi) = \bigcap_{t \geq 0} \text{cl}_X \{Q(\tau)\varphi : \tau \geq t\}$. (cl_X es el operador de clausura en el espacio X). Por definición, $\omega(X/\varphi) = \emptyset$ si $Q(t)\varphi$ no está definido para todo $t > 0$. Se tiene:

- (i) $\omega(C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)/\varphi) = \omega(L^\infty(\Omega)\text{-débil}^*/\varphi)$.
- (ii) $\omega(X/\varphi)$ consta únicamente de soluciones estacionarias de (E), es decir, soluciones independientes de t .
- (iii) $\omega(X/\varphi)$ es no vacío si existe una sucesión $0 < t_1 < t_2 \rightarrow \infty$ tal que $Q(t_m)\varphi$ permanece acotado en $L^\infty(\Omega)$ cuando $m \rightarrow \infty$.

Demostración: Véase Matano [23].

Se dice que una solución estacionaria v es fuertemente inestable (Matano 23) si existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que si $\psi \in L^\infty(\Omega) \cap C^0(\Omega)$, $\psi \neq v$ y $\psi \geq v$ ($\psi \leq v$), entonces $[Q(t_0)\psi](x_0) \geq v(x_0) + \varepsilon_0$ ($[Q(t_0)\psi](x_0) \leq v(x_0) - \varepsilon_0$) para algún (x_0, t_0) .

Proposición I.4.2 (Principio lineal de estabilidad)

Sea v una solución estacionaria de (E), y supongamos que el autovalor mayor del problema lineal (μ_0):

$$-\Delta w = \mu w - f'(v)w$$

es distinto de cero. Entonces, si $\mu_0 > 0$, v es fuertemente inestable; si $\mu_0 < 0$, v es exponencialmente estable (por ejemplo, en la norma L^2 : $\|Q(t)\varphi - v\|_{L^2} \rightarrow 0$ exponencialmente).

Demostración: La primera parte puede encontrarse en Matano [23]. Para la segunda, véase, por ejemplo, Rauch [26].

Proposición I.4.4 (Principio de comparación)

Sean $r_1(t)$, $r_2(t)$ dos soluciones de (E) independientes de x . Entonces, si $u(x,t)$ es una solución de (E) tal que $r_1(0) \leq u(x,0) \leq r_2(0)$, se tiene $r_1(t) \leq u(x,t) \leq r_2(t)$ para todo $t \geq 0$.

Demostración: Véase Pife [11].

CAPITULO II

FORMULACION DEL PROBLEMA. EL METODO DE LIAPUNOV-SCHMIDT

II.1 El problema

Consideremos una familia de dominios acotados, regulares y conexos $\Omega_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$, tal que $\Omega_\varepsilon \subset \Omega_{\varepsilon'}$ si $\varepsilon \leq \varepsilon'$, y $|\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0| \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, donde Ω_0 es un dominio regular que consta de dos componentes conexas Ω_0^L y Ω_0^R .

Dada una función regular $f: \Lambda \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, nuestro objetivo es estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación de evolución

$$(E(\lambda, \varepsilon)) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(\lambda, u) & \text{en } \Omega_\varepsilon \times (0, \infty) \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{en } \partial\Omega_\varepsilon \times (0, \infty) \end{cases}$$

para valores pequeños de λ, ε , como perturbación del problema correspondiente para $\lambda = \varepsilon = 0$, es decir, $(E(0, 0))$.

Los resultados enunciados en la sección I.4 nos permiten concluir que el conjunto ω -límite de toda órbita acotada consiste exclusivamente de puntos de equilibrio de $(E(\lambda, \varepsilon))$, es decir, soluciones de la ecuación estacionaria

$$(S(\lambda, \varepsilon)) \begin{cases} \Delta u + f(\lambda, u) = 0 & \text{en } \Omega_\varepsilon \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{en } \partial\Omega_\varepsilon \end{cases}$$

La descripción precisa de los dominios Ω_ε tendrá lugar en el Capítulo III; en este momento, nos interesan dos de sus propiedades fundamentales:

(Ω 1): $\lambda_\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \lambda^{(2)}(\Omega_\epsilon) \rightarrow 0$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

(Ω 2): $\lambda^{(3)}(\Omega_\epsilon)$ está acotado inferiormente por una constante estrictamente positiva.

Notación: Δ_ϵ representa el operador laplaciano con condición de contorno de Neumann. $\lambda^{(2)}(\Omega_\epsilon)$, $\lambda^{(3)}(\Omega_\epsilon)$ representan el segundo y tercer autovalor, respectivamente, de Δ en Ω_ϵ .

w_ϵ representa una autofunción correspondiente a $\lambda_\epsilon = \lambda^{(2)}(\Omega_\epsilon)$ con $\int_{\Omega_\epsilon} w^2 = 1$.

II.2 El método de Liapunov-Schmidt

Al tener el operador Δ_ϵ un autovalor igual a cero, hemos de encontrar ciertos subespacios \hat{L}_ϵ , \hat{L}'_ϵ de codimensión finita, tales que Δ_ϵ transforma \hat{L}_ϵ en \hat{L}'_ϵ y tiene inversa acotada (es decir, su restricción a \hat{L}_ϵ).

Como en todo problema de tipo Neumann, la elección natural sería $\hat{L}_\epsilon = \hat{L}'_\epsilon = \{f \in L^2(\Omega_\epsilon) : \int_{\Omega_\epsilon} f = 0\}$, es decir, el subespacio ortogonal al núcleo de Δ_ϵ ; sin embargo, es fácil comprobar que, si bien Δ_ϵ^{-1} está definido como operador lineal y acotado en \hat{L}_ϵ , su norma como operador tiende a infinito cuando $\epsilon \rightarrow 0$, a causa de la propiedad (Ω 1) indicada antes. Para evitar este inconveniente, la propiedad (Ω 2) nos sugiere tomar

$$\hat{L}_\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in L^2(\Omega_\epsilon) : \int_{\Omega_\epsilon} f = 0, \int_{\Omega_\epsilon} w_\epsilon f = 0\}.$$

$$\hat{U}_\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \text{subespacio engendrado por } \{1, w_\epsilon\};$$

$$L^2(\Omega_\epsilon) = \hat{L}_\epsilon \oplus \hat{U}_\epsilon.$$

$\Delta_\varepsilon^{-1}|_{\hat{L}_\varepsilon}$ toma sus valores en $H^1(\Omega_\varepsilon) \cap \hat{L}_\varepsilon$; llamemos $\hat{\kappa}_\varepsilon$ al operador $\Delta_\varepsilon^{-1}|_{\hat{L}_\varepsilon}$ considerado como una aplicación lineal y continua:

$$\hat{\kappa}_\varepsilon: \hat{L}_\varepsilon \rightarrow \hat{H}_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} H^1(\Omega_\varepsilon) \cap \hat{L}_\varepsilon.$$

Por la caracterización variacional de los autovalores, (sección I.3), toda función $u \in \hat{H}_\varepsilon$ satisface $\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 \geq \lambda^{(3)}(\Omega_\varepsilon) \int_{\Omega_\varepsilon} u^2$ y entonces

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 &\leq \{1 + \lambda^{(3)}(\Omega_\varepsilon)\}^{-1} \|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 \\ \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 &\geq \lambda^{(3)}(\Omega_\varepsilon) \{1 + \lambda^{(3)}(\Omega_\varepsilon)\}^{-1} \|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 \end{aligned}$$

Sea $f \in \hat{L}_\varepsilon$ y llamemos $u = \hat{\kappa}_\varepsilon f$; u satisface

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 = \int_{\Omega_\varepsilon} f u \leq \|f\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \|u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$$

Por tanto,

$$\|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \left\{ \lambda^{(3)}(\Omega_\varepsilon)^{-1} + \lambda^{(3)}(\Omega_\varepsilon)^{-2} \right\}^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$$

con igualdad cuando f es una autofunción correspondiente a $\lambda^{(3)}(\Omega_\varepsilon)$. Por tanto

$$(*) \quad \|\hat{\kappa}_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(\hat{L}_\varepsilon, \hat{H}_\varepsilon)} = \left\{ \lambda^{(3)}(\Omega_\varepsilon)^{-1} + \lambda^{(3)}(\Omega_\varepsilon)^{-2} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq C_1$$

para ε suficientemente pequeño, donde C_1 es una constante independiente de ε .

Sea P_ε la proyección ortogonal $L^2(\Omega_\varepsilon) \rightarrow \hat{U}_\varepsilon$,

$$P_\varepsilon f = |\Omega_\varepsilon|^{-1} \int_{\Omega_\varepsilon} f + w_\varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} w_\varepsilon f.$$

La ecuación $-\Delta_\epsilon u = f(\lambda, u)$ es equivalente a

$$(1) \quad \begin{cases} (I-P_\epsilon)(-\Delta_\epsilon u) = (I-P_\epsilon)f(\lambda, u) \\ P_\epsilon(-\Delta_\epsilon u) = P_\epsilon f(\lambda, u) \end{cases}$$

Para cualquier $u \in \mathcal{D}(\Delta_\epsilon)$, se tiene

$$P_\epsilon(\Delta_\epsilon u) = |\Omega_\epsilon|^{-1} \int_{\Omega_\epsilon} \Delta u + w_\epsilon \int_{\Omega_\epsilon} w_\epsilon \Delta u = w_\epsilon \int_{\Omega_\epsilon} (\Delta w_\epsilon) u = -\lambda_\epsilon w_\epsilon \int_{\Omega_\epsilon} w_\epsilon u$$

ya que $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial w_\epsilon}{\partial n} = 0$ en $\partial\Omega_\epsilon$. Expresando $u = \alpha + \beta w_\epsilon + \hat{u}$, $\hat{u} \in \hat{H}_\epsilon$, tenemos

$$P_\epsilon(\Delta u) = -\lambda_\epsilon w_\epsilon \int_{\Omega_\epsilon} w_\epsilon (\alpha + \beta w_\epsilon + \hat{u}) = -\beta \lambda_\epsilon w_\epsilon = \Delta(P_\epsilon u).$$

Por tanto, (1) puede escribirse de la siguiente forma:

$$\begin{cases} -\Delta_\epsilon \hat{u} = (I-P_\epsilon)f(\lambda, \alpha + \beta w_\epsilon + \hat{u}) \\ \beta \lambda_\epsilon w_\epsilon = P_\epsilon f(\lambda, u) \end{cases}$$

o también

$$(2) \quad \begin{cases} \hat{u} = \hat{\mathcal{K}}_\epsilon (I-P_\epsilon)f(\lambda, \alpha + \beta w_\epsilon + \hat{u}) \\ \int_{\Omega_\epsilon} f(\lambda, \alpha + \beta w_\epsilon + \hat{u}) = 0 \\ -\beta \lambda_\epsilon + \int_{\Omega_\epsilon} w_\epsilon f(\lambda, \alpha + \beta w_\epsilon + \hat{u}) = 0 \end{cases}$$

Así, $u \in \mathcal{D}(\Delta_\epsilon)$ es solución de $-\Delta_\epsilon u = f(\lambda, u)$ si y sólo si $u = \alpha + \beta w_\epsilon + \hat{u}$, donde $\hat{u} \in \hat{H}_\epsilon$ y α, β, \hat{u} satisfacen (2).

A continuación impondremos ciertas hipótesis sobre f con la idea de garantizar la solubilidad de la primera de las ecuaciones en (2) (la "ecuación funcional" o "infinito-dimensional"):

(f 1) f es regular (C^∞) en ambas variables.

(f 2) Existe un $\lambda_0 > 0$ tal que $|f_u(\cdot, u)| \leq k_1$ para $|\lambda| \leq \lambda_0$, $u \in \mathbb{R}$ y $k_1 < 1/(2C_1)$, donde $C_1 = \inf_{\epsilon > 0} \|\hat{\mathcal{K}}_\epsilon\|$. (ver (*))

Los resultados establecidos en el Capítulo I nos permiten afirmar que, para cada ε fijo, la aplicación

$$\begin{aligned}\Phi^\varepsilon: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \hat{H}_\varepsilon &\rightarrow \hat{L}_\varepsilon \\ \Phi^\varepsilon(\lambda, \alpha, \beta, \hat{u}) &= f(\lambda, \alpha + \beta w_\varepsilon + \hat{u})\end{aligned}$$

es diferenciable (C^∞) en α, β, λ (si $n \geq 2$; en cualquier caso es al menos C^2), y, además,

$$\|D_{\hat{u}} \Phi^\varepsilon(\lambda, \alpha, \beta, \hat{u})\|_{\mathcal{L}(\hat{H}_\varepsilon, \hat{L}_\varepsilon)} \leq k_1 \quad \text{si } |\lambda| \leq \lambda_0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \hat{u} \in \hat{H}_\varepsilon$$

La hipótesis $k_1 < 1/(2\sigma_1)$ implica que $\|\hat{K}_\varepsilon(I - P_\varepsilon)D_{\hat{u}} \Phi^\varepsilon\| < \frac{1}{2}$ para cualquier $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \hat{u} \in \hat{H}_\varepsilon, |\lambda| \leq \lambda_0$; por tanto, podemos aplicar el Teorema de la Función Implícita a la ecuación

$$(3) \quad \hat{u} - \hat{K}_\varepsilon(I - P_\varepsilon)\Phi^\varepsilon(\lambda, \alpha, \beta, \hat{u}) = 0$$

y concluir que, para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, |\lambda| \leq \lambda_0, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ (independiente de $\alpha, \beta, \lambda, \hat{u}$), (3) admite solución única $\hat{u} = \hat{u}(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon)$ diferenciable en α, β, λ para cada ε fijo.

Sustituyendo esta solución única en la segunda y tercera ecuaciones de (2), definimos las Ecuaciones de Bifurcación:

$$(4) \quad G(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_\varepsilon} f(\lambda, \alpha + \beta w_\varepsilon + \hat{u}(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon)) = 0$$

$$(5) \quad H(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} -\beta \lambda_\varepsilon + \int_{\Omega_\varepsilon} w_\varepsilon f(\lambda, \alpha + \beta w_\varepsilon + \hat{u}(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon)) = 0$$

En resumen, hemos demostrado la siguiente

Proposición II.2.1 Bajo las hipótesis ($\Omega 1$), ($\Omega 2$), (f 1) y (f 2), una función u es solución de $S(\lambda, \varepsilon)$ si y sólo si u puede expresarse de la forma $u = \alpha + \beta w_\varepsilon + \hat{u}(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon)$, donde $u(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon)$ satisface (3) y α, β satisfacen (4), (5). Por tanto, hay una correspondencia biunívoca entre el conjunto de

soluciones de $S(\lambda, \varepsilon)$ y el conjunto de soluciones (α, β) de (4), (5).

Nuestro próximo objetivo es analizar las ecuaciones de bifurcación en el entorno de $\lambda=0$, $\varepsilon=0$. No hay problema en cuanto a regularidad en α, β, λ , consecuencia directa del Teorema de la Función Implícita. Sin embargo, no es fácil decidir el tipo de regularidad de las funciones G, H con respecto a ε : este es el problema que tratan los dos capítulos siguientes.

CAPITULO III

LOS DOMINIOS Ω_ϵ Y SUS PROPIEDADES BASICAS

En este capítulo presentamos los dominios Ω_ϵ que constituyen el objeto de nuestro estudio y demostramos algunas de sus propiedades básicas, siempre en relación con las Ecuaciones de Bifurcación definidas al final del capítulo anterior. Ciertas propiedades pueden expresarse de forma abstracta, de forma que algunos resultados siguen siendo válidos para familias de dominios más generales; esta discusión aparece en el Capítulo IX.

III.1 Los dominios Ω_ϵ

Sean Ω_0^R y Ω_0^L dos dominios regulares y conexos en R^2 que satisfacen las condiciones siguientes:

- a) $\Omega_0^L \subset \{(x,y): x < -1\}$; $\Omega_0^R \subset \{(x,y): x > 1\}$.
- b) $\{(x,y): x = -1, |y| \leq 1\} \subset \partial\Omega_0^L$; $\{(x,y): x = 1, |y| \leq 1\} \subset \partial\Omega_0^R$
- c) $\{(x,y): -3 \leq x \leq -1, |y| \leq 1\} \subset \bar{\Omega}_0^L$
 $\{(x,y): 1 \leq x \leq 3, |y| \leq 1\} \subset \bar{\Omega}_0^R$.

Sean r_+ , r_- funciones continuas $[-1,1] \rightarrow R$, de clase C^∞ en $(-1,1)$, que satisfacen las propiedades siguientes:

d) $r_+(0) > 0$, $r_+(-1) = r_+(1) = 1$; $r_-(0) < 0$, $r_-(-1) = r_-(1) = -1$

e) $r'(x) < 0$ si $x < 0$, $r'(x) > 0$ si $x > 0$

$r'_-(x) < 0$ si $x < 0$, $r'_-(x) > 0$ si $x > 0$

f) Para todo entero $k \geq 1$,

$$\left| \frac{d^k r_+(x)}{dx^k} \right| \rightarrow \infty, \quad \left| \frac{d^k r_-(x)}{dx^k} \right| \rightarrow \infty \quad \text{cuando } |x| \rightarrow 1.$$

Estas propiedades implican que las curvas planas

$$\{(x,y): x = -1, y \geq 1\} \cup \{(x,y): y = r_+(x)\} \cup \{(x,y): x = 1, y \geq 1\},$$

$$\{(x,y): x = -1, y \leq -1\} \cup \{(x,y): y = r_-(x)\} \cup \{(x,y): x = 1, y \leq -1\}$$

son de clase C^∞ .

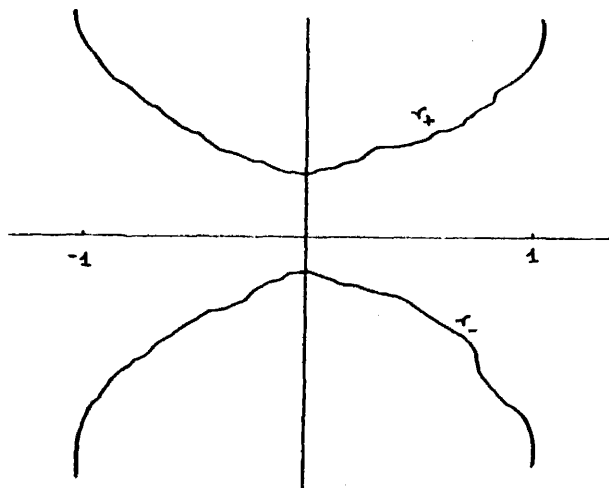


Figura n° 1

Definamos

- (1) $R_\varepsilon = \{(x, y) : \varepsilon r_-(x) < y < \varepsilon r_+(x), |x| \leq 1\}$.
- (2) $\Omega_\varepsilon = \Omega_0^L \cup R_\varepsilon \cup \Omega_0^R = \Omega_0 \cup R_\varepsilon$.
- (3) $Q_\varepsilon^L = \{(x, y) : -3 \leq x \leq -1, \varepsilon r_-(-2-x) < y < \varepsilon r_+(-2-x)\}$
 $Q_\varepsilon^R = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 3, \varepsilon r_-(2-x) < y < \varepsilon r_+(2-x)\}$
 $Q_\varepsilon = Q_\varepsilon^L \cup Q_\varepsilon^R$.

Es evidente que los dominios Ω_ε recién definidos son regulares, acotados y conexos, y satisfacen $\Omega_\varepsilon \subset \Omega_{\varepsilon'}$, si $\varepsilon < \varepsilon'$. Q_ε^L es precisamente el resultado de reflejar simétricamente R_ε tomando la línea $y = -1$ como eje; mientras que si tomamos como eje $y = 1$ obtenemos Q_ε^R . El conjunto Q_ε cobrará importancia más adelante.

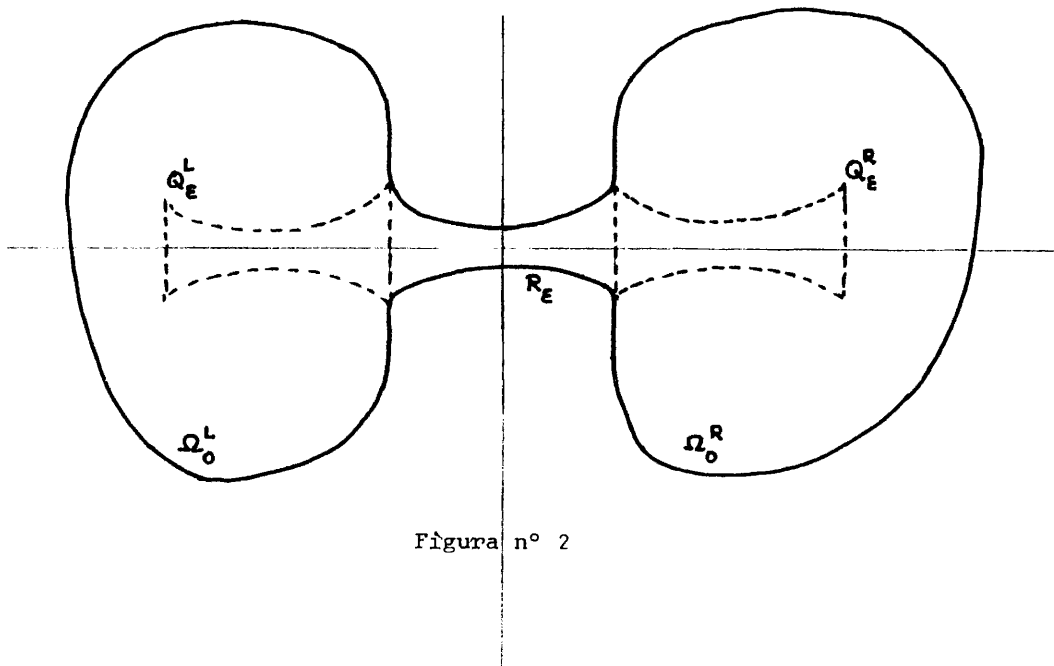


Figura n° 2

III.2 Propiedades básicas de los dominios Ω_ε

Proposición III.2.1 La función $\varepsilon \mapsto |\Omega_\varepsilon|$ es continua en $[0,1]$.
En particular, $|\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0| \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Demostración: $|\Omega_\varepsilon| = |\Omega_0| + \int_{-1}^1 \varepsilon (r_+(x) - r_-(x)) dx$.

QED

Proposición III.2.2 Para cada ε , $0 \leq \varepsilon \leq 1$, existe un operador lineal de extensión $E_\varepsilon: L^2(\Omega_\varepsilon) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$, $E(H^1(\Omega_\varepsilon)) \subset H^1(\mathbb{R}^2)$, tal que, para cada $\varepsilon > 0$, $\|E_\varepsilon\| \leq C(\varepsilon)$ tanto en $\mathcal{L}(L^2(\Omega_\varepsilon), L^2(\mathbb{R}^2))$ como en $\mathcal{L}(H^1(\Omega_\varepsilon), H^1(\mathbb{R}^2))$; $C(\cdot)$ es una función acotada en intervalos compactos de $(0,1]$.

Demostración: Los resultados relativos a operadores de extensión establecidos en el Capítulo I implican la existencia del operador E_0 (es decir, $\varepsilon=0$), ya que Ω_0 es un dominio regular y acotado.

Definamos el siguiente conjunto no acotado:

$$D_\varepsilon = \{(x,y): |x| \geq 1\} \cup R_\varepsilon.$$

Fijemos $\varepsilon=1$. Por el Teorema de Extensión (I.2.2.1), existe un operador de extensión $E_{D_1}: L^2(D_1) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$, con $E_{D_1}(H^1(D_1)) \subset H^1(\mathbb{R}^2)$, ya que D_1 es un dominio cuya frontera es mínimamente regular.

Observemos ahora que D_ε es precisamente la imagen de D_1 mediante la contracción lineal $x' = x$, $y' = \varepsilon y$, cuyo

jacobiano es ε . Así, podemos definir, por composición, un operador de extensión $E_{D_\varepsilon} : L^2(D_\varepsilon) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\|E_{D_\varepsilon}\| \leq \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \|E_{D_1}\| \quad (\text{en } L^2 \text{ y } H^1).$$

Sea $u \in L^2(\Omega_\varepsilon)$, ó $u \in H^1(\Omega_\varepsilon)$. Llamemos $R_{\Omega_0} u$ a la restricción de u a Ω_0 . Definimos \tilde{u} en D_ε de la forma:

$$\tilde{u} = \begin{cases} u & \text{en } R_\varepsilon \\ E_0(R_{\Omega_0} u) & \text{en } \{(x, y) : |x| \geq 1\}. \end{cases}$$

Si $u \in H^1(\Omega_\varepsilon)$, entonces $u \in H^1(D_\varepsilon)$, ya que $u = \tilde{u}$ en Ω_ε y $(D_\varepsilon \setminus \Omega_0) \cap \bar{R}_\varepsilon = \emptyset$ si $\varepsilon < 1$.

Definimos ahora:

$$E_\varepsilon(u) = E_{D_\varepsilon}(\tilde{u})$$

Se tiene: $\|E_\varepsilon(u)\|_{R^2} \leq \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \|u\|_{D_\varepsilon} = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} (\|u\|_{R_\varepsilon} + \|E_0(R_{\Omega_0} u)\|_{\Omega_0}) \leq \varepsilon^{-\frac{1}{2}} (\|u\|_{R_\varepsilon} + \|E_0\| \|u\|_{\Omega_0}) \leq C \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \|u\|_{\Omega_\varepsilon} \quad (\text{en } L^2 \text{ y } H^1).$

Por tanto, $\|E_\varepsilon\| \leq C \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ para $\varepsilon > 0$.

QED

Esta proposición nos permite concluir que las normas (como operadores) de las inclusiones de Sobolev $H^1(\Omega_\varepsilon) \hookrightarrow L^p(\Omega_\varepsilon)$ para $p > 2$ son de orden $\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$. Sin embargo, esta cota no es suficiente para obtener las estimaciones que necesitaremos más adelante. El objeto de la siguiente proposición es demostrar la existencia de cotas más ajustadas.

En primer lugar, definamos

$$\tilde{R}_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \cap \{-3, 3\} \times (-\varepsilon, \varepsilon]$$

Proposición III.2.3 Para cada $p > 2$ existe una constante M_p tal que, para todo $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \leq 1$, $u \in H^1(\Omega_\varepsilon)$,

$$(i) \quad \|u\|_{L^p(\tilde{R}_\varepsilon)} \leq M_p \varepsilon^{(1/p)-(1/2)} \|u\|_{H^1(\tilde{R}_\varepsilon)}$$

$$(ii) \quad \|u\|_{L^p(\Omega_0)} \leq M_p \|u\|_{H^1(\Omega_0)}$$

$$(iii) \quad \|u\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} \leq M_p \varepsilon^{(1/p)-(1/2)} \|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$$

M_p permanece acotada cuando $p \rightarrow 2^+$ y tiende a ∞ cuando $p \rightarrow \infty$.

Demostración: El cambio de variables $x = x'$, $y = \varepsilon y'$ transforma \tilde{R}_1 (es decir, \tilde{R}_ε para $\varepsilon=1$) en \tilde{R}_ε . \tilde{R}_1 es un dominio fijo que satisface la propiedad del cono; por tanto, podemos aplicar el teorema de inclusión de Sobolev: $H^1(\tilde{R}_1) \hookrightarrow L^p(\tilde{R}_1)$; sea M'_p la norma de esta inclusión.

Dada $u \in H^1(\Omega_\varepsilon)$, definimos $v(x', y') = u(x', \varepsilon y')$; v está definida en $\varepsilon^{-1}\Omega_\varepsilon$ y satisface $\|v\|_{L^p(\tilde{R}_1)} \leq$

$$\leq M'_p \|v\|_{H^1(\tilde{R}_1)}. \text{ Entonces,}$$

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p(\tilde{R}_\varepsilon)}^p &= \int_{\tilde{R}_\varepsilon} u^p(x, y) dx dy = \varepsilon \int_{\tilde{R}_1} u^p(x', \varepsilon y') dx' dy' = \\ &= \varepsilon \int_{\tilde{R}_1} v^p(x', y') dx' dy' \leq \varepsilon (M'_p)^p \left[\int_{\tilde{R}_1} (v^2 + v_{x'}^2 + v_{y'}^2) dx' dy' \right]^{\frac{p}{2}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon (M'_p)^p \left[\int_{\tilde{R}_\varepsilon} [u^2(x', \varepsilon y') + u_x^2(x', \varepsilon y') + \varepsilon^2 u_y^2(x', \varepsilon y')] dx' dy' \right]^{p/2} \leq \\
&\leq \varepsilon (M'_p)^p \left[\varepsilon^{-1} \int_{\tilde{R}_\varepsilon} (u^2 + u_x^2 + u_y^2) dx dy \right]^{p/2} = \varepsilon^{1-(p/2)} (M'_p)^p \|u\|_{H^1(\tilde{R}_\varepsilon)}^p
\end{aligned}$$

Por tanto, $\|u\|_{L^p(\tilde{R}_\varepsilon)} \leq M'_p \varepsilon^{(1/p)-(1/2)} \|u\|_{H^1(\tilde{R}_\varepsilon)}$.

(ii) es consecuencia directa del Teorema de Inclusión de Sobolev aplicado a Ω_0 (que, evidentemente, satisface la propiedad del cono). Si M_p'' representa la constante correspondiente, tomamos $\bar{M}_p = \max \{M_p', M_p''\}$. Por las propiedades de las constantes de Sobolev, \bar{M}_p permanece acotada cuando $p \rightarrow 2$ y tiende a ∞ cuando $p \rightarrow \infty$.

(iii) Inmediato, definiendo $M_p = 2\bar{M}_p$.

QED

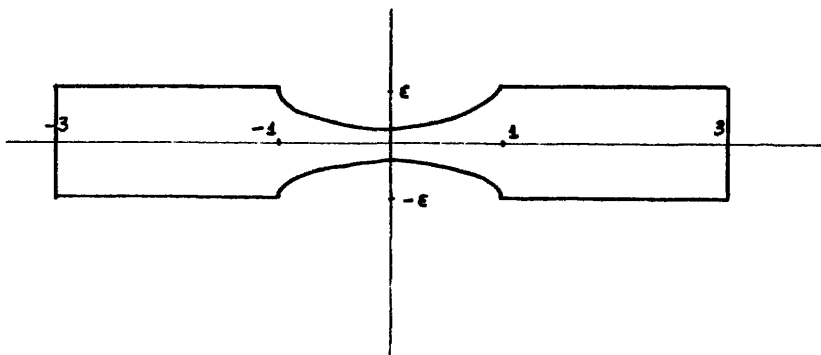


Figura n° 3

La siguiente proposición es una de las más importantes, pues, nos permite obtener estimaciones sobre soluciones de problemas elípticos en Ω_ϵ en la región "conflictiva" R_ϵ en función (parcialmente) de los valores de dichas soluciones en la región invariante Ω_0 . En particular, podremos demostrar que el tercer autovalor $\lambda^{(3)}(\Omega_\epsilon)$ está acotado inferiormente por una constante estrictamente positiva (condición (N 2) del Capítulo II).

Proposición III.2.4 Existe una constante $M > 0$ tal que, para cada $\epsilon > 0$ y cada $u \in C^\infty(\bar{\Omega}_\epsilon)$, $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ en $\partial\Omega_\epsilon$, se tiene

$$\|u\|_{H^1(R_\epsilon)} \leq M \left[\|\Delta u\|_{L^2(R_\epsilon)} + \|u\|_{H^1(Q_\epsilon)} \right]$$

donde Q_ϵ es el conjunto definido en (3), sec. III.1,

Para la demostración necesitamos el siguiente

Lema III.2.5 Sean $T_\epsilon = \partial R_\epsilon \cap \partial\Omega_0$ y

$$c_\epsilon = \inf \left\{ \int_{R_\epsilon} |\nabla v|^2 / \int_{R_\epsilon} v^2 : v \in C^\infty(\bar{R}_\epsilon), v = 0 \text{ en } T_\epsilon, v \not\equiv 0 \right\}$$

Entonces, $c_\epsilon \geq \pi^2/4$ para todo $\epsilon > 0$.

Demostración: Sea $v \in C^\infty(\bar{R}_\epsilon)$ tal que $v = 0$ en T_ϵ ; fijemos $y \in (-\epsilon, \epsilon)$ y llamemos $I(y) = \{x \in [-1, 1] : (x, y) \in R_\epsilon\}$.

Si $\varepsilon r_-(0) < y < \varepsilon r_+(0)$, entonces $I(y) = [-1, 1]$ y $v(., y)$ se anula para $x = -1$ y $x = 1$. Por tanto,

$$\int_{-1}^1 v_x^2(x, y) dx \geq \frac{\pi^2}{4} \int_{-1}^1 v^2(x, y) dx$$

pues $\pi^2/4$ es el primer autovalor del operador $-d^2/dx^2$ en $[-1, 1]$ con condición de contorno de Dirichlet.

Si $y > \varepsilon r_+(0)$ ó $y < \varepsilon r_-(0)$, $I(y)$ consta de dos segmentos, $[-1, x_-]$ y $[x_+, 1]$ donde $x_- < 0 < x_+$ son las dos soluciones de $\varepsilon r_+(x) = y$ (ó $\varepsilon r_-(x) = y$). v satisface $v(-1, y) = 0$, $v(1, y) = 0$; por consiguiente

$$\begin{aligned} \int_{I(y)} v_x^2(x, y) dx &= \int_{-1}^{x_-} v_x^2(x, y) dx + \int_{x_+}^1 v_x^2(x, y) dx \geq \\ &\geq \frac{\pi^2}{4(x_- - 1)^2} \int_{-1}^{x_-} v^2(x, y) dx + \frac{\pi^2}{4(1 - x_+)^2} \int_{x_+}^1 v^2(x, y) dx \geq \\ &\geq \frac{\pi^2}{4} \int_{I(y)} v^2(x, y) dx \end{aligned}$$

ya que la constante $\pi^2/(b-a)^2$ es el primer autovalor del operador $-d^2/dx^2$ en (a, b) con condición de Dirichlet en $x = a$ y condición de Neumann en $x = b$ (o viceversa). Por tanto,

$$\begin{aligned} \iint_{R_\varepsilon} |\nabla v|^2 dx dy &\geq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left[\int_{I(y)} v_x^2(x, y) dx \right] dy \geq \\ &\geq \frac{\pi^2}{4} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left[\int_{I(y)} v^2(x, y) dx \right] dy = \frac{\pi^2}{4} \iint_{R_\varepsilon} v^2(x, y) dx dy \end{aligned}$$

QED

Demostración de la Proposición III.2.4: Llámemos $f = -\Delta u$, por hipótesis, $f \in C^\infty(\bar{\Omega}_\varepsilon)$.

Sea $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^∞ con soporte compacto, tal que $h(-1) = 1$, $h(1) = 0$; definamos

$$\tilde{u}(x, y) = u(-2-x, y)h(x) + u(2-x, y)h(-x), \quad (x, y) \in R_\varepsilon.$$

Claramente, $\tilde{u} \in C^\infty(\bar{R}_\varepsilon)$, $u = \tilde{u}$ en T_ε y

$$\|\tilde{u}\|_{H^1(R_\varepsilon)} \leq \|h\|_{H^1(\mathbb{R})} \|u\|_{H^1(Q_\varepsilon)} \leq C' \|u\|_{H^1(Q_\varepsilon)}$$

donde C' es una constante independiente de ε .

Como $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ en $\partial\Omega_\varepsilon$, vemos que u satisface

$$\int_{R_\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{R_\varepsilon} f v \quad \text{para toda } v \in C^\infty(\bar{R}_\varepsilon), v = 0 \text{ en } T_\varepsilon$$

(basta extender $v = 0$ en el exterior de R_ε ; sea \tilde{v} tal extensión. Se tiene: $\tilde{v} \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ y $\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega_\varepsilon} f v$.)

Si tomamos $v = u - \tilde{u}$, entonces $v \in C^\infty(\bar{R}_\varepsilon)$ y $v = 0$

en T_ε . Sustituyendo, obtenemos

$$\int_{R_\varepsilon} f(u - \tilde{u}) = \int_{R_\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla(u - \tilde{u}) = \int_{R_\varepsilon} |\nabla(u - \tilde{u})|^2 + \int_{R_\varepsilon} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla(u - \tilde{u})$$

Aplicando el lema III.2.5, vemos que

$$\int_{R_\varepsilon} |\nabla(u - \tilde{u})|^2 \geq c_\varepsilon \int_{R_\varepsilon} (u - \tilde{u})^2, \quad c_\varepsilon \geq \pi^2/4.$$

Escribamos $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2(R_\varepsilon)}$; entonces,

$$\int_{R_\varepsilon} |\nabla(u - \tilde{u})|^2 = \int_{R_\varepsilon} f(u - \tilde{u}) - \int_{R_\varepsilon} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla(u - \tilde{u}) \leq \|f\| \|u - \tilde{u}\| + \|\nabla \tilde{u}\| \|\nabla(u - \tilde{u})\| \leq$$

$$\leq c_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \|f\| \|\nabla(u-\tilde{u})\| + \|\nabla\tilde{u}\| \|\nabla(u-\tilde{u})\| \leq [c_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \|f\| + \|\nabla\tilde{u}\|] \|\nabla(u-\tilde{u})\|$$

Por tanto, $\|\nabla(u-\tilde{u})\|^2 \leq [c_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \|f\| + \|\nabla\tilde{u}\|]^2 \leq 2c_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \|f\|^2 + 2\|\nabla\tilde{u}\|^2$; aplicando $\|u-\tilde{u}\|^2 \leq c_\varepsilon^{-1} \|\nabla(u-\tilde{u})\|^2$, obtenemos

$$\begin{aligned} \|u-\tilde{u}\|_{H^1(R_\varepsilon)}^2 &\leq (1+c_\varepsilon^{-1}) \|\nabla(u-\tilde{u})\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2 \leq \\ &\leq (1+c_\varepsilon^{-1}) [2c_\varepsilon^{-1} \|f\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2 + 2\|\nabla\tilde{u}\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2] \leq \\ &\leq (1+\frac{4}{\pi^2}) [\frac{8}{\pi^2} \|f\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2 + 2\|\nabla u\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2] \end{aligned}$$

por el lema anterior. Para terminar la demostración, basta aplicar $\|\tilde{u}\|_{H^1(R_\varepsilon)} \leq C \|u\|_{H^1(Q_\varepsilon)}$.

QED

III.3 Convergencia de familias de funciones.

Como los dominios Ω_ε cambian cuando ε varía, no parece obvio decidir en qué sentido una familia de funciones (por ejemplo, una familia de soluciones del problema estacionario $S(\lambda, \varepsilon)$) "varía continuamente" en ε . Vamos a definir a continuación las nociones de convergencia que parecen apropiadas para tratar nuestro problema. Al final de este capítulo aparece una nota bibliográfica explicando las relaciones entre este concepto de convergencia y otros que aparecen en la literatura.

Definición III.3.1 X representa L^2 ó H^1 ,

Sea ε_0 dado, $0 \leq \varepsilon_0 < 1$, y sea $\{\varepsilon_k\} \subset (0,1]$ tal que $\varepsilon_k \rightarrow \varepsilon_0^+$ cuando $k \rightarrow \infty$. Dada una familia de funciones $\{u_{\varepsilon_k}\}$

tal que $u_{\varepsilon_k} \in X(\Omega_{\varepsilon_k})$, definimos:

$u_{\varepsilon_k} \rightarrow u_{\varepsilon_0}$ fuertemente en X si $\{\|u_{\varepsilon_k}\|_{X(\Omega_{\varepsilon_k})}\}$ es acotado

y $\|u_{\varepsilon_k} - u_{\varepsilon_0}\| \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$.

$u_{\varepsilon_k} \rightarrow u_{\varepsilon_0}$ débilmente en X si $\{\|u_{\varepsilon_k}\|_{X(\Omega_{\varepsilon_k})}\}$ es acotado

y para cada $v \in X(\Omega_{\varepsilon_0})$, se tiene

$$\langle u_{\varepsilon_k}, v \rangle_{X(\Omega_{\varepsilon_0})} \rightarrow \langle u_{\varepsilon_0}, v \rangle_{X(\Omega_{\varepsilon_0})} \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty.$$

Sean $\varepsilon_0 \in (0,1]$ y $\{\varepsilon_k\} \subset (0,1)$ tales que $\varepsilon_k \rightarrow \varepsilon_0^-$ cuando $k \rightarrow \infty$. Dada una familia de funciones $u_{\varepsilon_k} \in X(\Omega_{\varepsilon_k})$

definimos:

$u_{\varepsilon_k} \rightarrow u_{\varepsilon_0}$ fuertemente en X si $\|u_{\varepsilon_k} - u_{\varepsilon_0}\|_{X(\Omega_{\varepsilon_k})} \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$.

$u_{\varepsilon_k} \rightarrow u_{\varepsilon_0}$ débilmente en X si $\{\|u_{\varepsilon_k}\|_{X(\Omega_{\varepsilon_k})}\}$ es acotado y

para cada $v \in X(\Omega_{\varepsilon_0})$ se tiene

$$\langle u_{\varepsilon_k}, v \rangle_{X(\Omega_{\varepsilon_k})} \rightarrow \langle u_{\varepsilon_0}, v \rangle_{X(\Omega_{\varepsilon_0})} \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty.$$

Sea $I \subset [0,1]$ un intervalo abierto y, para cada $\varepsilon \in I$, sea $u_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)$. Fijemos $\varepsilon_0 \in I$. Decimos que $u_\varepsilon \rightarrow u_{\varepsilon_0}$ cuando $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0^+$ (ó $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0^-$) en cualquiera de los sentidos definidos en el párrafo anterior si, para cada sucesión $\varepsilon_k \rightarrow \varepsilon_0^{+(-)}$, se tiene $u_{\varepsilon_k} \rightarrow u_{\varepsilon_0}$ en el sentido indicado. Decimos que $u_\varepsilon \rightarrow u_{\varepsilon_0}$ cuando $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$ si se tiene $u_\varepsilon \rightarrow u_{\varepsilon_0}$ cuando $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0^+$ y $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0^-$. Decimos que $\varepsilon \mapsto u_\varepsilon$ es continua en ε_0 si $u_\varepsilon \rightarrow u_{\varepsilon_0}$ cuando $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$. Finalmente, decimos que $\varepsilon \mapsto u_\varepsilon$ es continua si es continua en cada $\varepsilon \in I$.

En el caso $\varepsilon_k \rightarrow \varepsilon_0^+$, convergencia (fuerte o débil) en X es equivalente a convergencia en el espacio fijo $X(\Omega_{\varepsilon_0})$ de las restricciones $u_{\varepsilon_k}|_{\Omega_{\varepsilon_0}}$, junto con la existencia de una cota superior para $\|u_{\varepsilon_k}\|_{X(\Omega_{\varepsilon_k})}$. En el caso $\varepsilon_k \rightarrow \varepsilon_0^-$, los operadores de extensión E_ε definidos en la Proposición III.2.2 nos permiten considerar $E_{\varepsilon_k} u_{\varepsilon_k}|_{\Omega_{\varepsilon_0}}$; a este respecto se tiene la siguiente proposición:

Lema III.3.2 $u_{\varepsilon_k} \rightarrow u_{\varepsilon_0}$ cuando $\varepsilon_k \rightarrow \varepsilon_0^-$ (en cualquiera de los sentidos definidos anteriormente) si $\{\|u_{\varepsilon_k}\|_{X(\Omega_{\varepsilon_k})}\}$ es

acotado y $E_{\varepsilon_k} u_{\varepsilon_k} |_{\Omega_{\varepsilon_0}} \rightarrow u_{\varepsilon_0}$ en el sentido considerado como funciones en el espacio $X(\Omega_{\varepsilon_0})$.

Demostración: En lo relativo a convergencia fuerte, el lema es consecuencia directa de las definiciones.

Convergencia débil: sea $\tilde{u}_{\varepsilon_k} = E_{\varepsilon_k} u_{\varepsilon_k} |_{\Omega_{\varepsilon_0}}$, y supongamos que $\tilde{u}_{\varepsilon_k} \rightarrow u_{\varepsilon_0}$ débilmente en $H^1(\Omega_{\varepsilon_0})$. En primer lugar, observemos que, para cada $v \in H^1(\Omega_{\varepsilon_0})$,

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_0} \setminus \Omega_{\varepsilon_k}} \tilde{u}_{\varepsilon_k} v \rightarrow 0 \text{ cuando } k \rightarrow \infty,$$

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_0} \setminus \Omega_{\varepsilon_k}} \nabla \tilde{u}_{\varepsilon_k} \cdot \nabla v \rightarrow 0 \text{ cuando } k \rightarrow \infty,$$

por la desigualdad de Schwarz ($\{ \|u_{\varepsilon_k}\|_{H^1(\Omega_{\varepsilon_0})} \}$ es acotado por

hipótesis), y el hecho de que $|\Omega_{\varepsilon_0} \setminus \Omega_{\varepsilon_k}| \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Por tanto,

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} u_{\varepsilon_k} v + \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \nabla u_{\varepsilon_k} \cdot \nabla v \rightarrow \int_{\Omega_{\varepsilon_0}} u_{\varepsilon_0} v + \int_{\Omega_{\varepsilon_0}} \nabla u_{\varepsilon_0} \cdot \nabla v$$

El mismo argumento puede aplicarse al caso de convergencia débil en L^2 .

QED

Vamos a demostrar ahora que las inyecciones $H^1(\Omega_\varepsilon) \hookrightarrow L^2(\Omega_\varepsilon)$ son "colectivamente compactas" (Grigorieff [16], Stummel [29,30]), es decir, se verifica una especie de "lema de Rellich colectivo":

Proposición III.3.3 Sean $u_{\varepsilon_k} \in H^1(\Omega_{\varepsilon_k})$ tales que $\{ \|u_{\varepsilon_k}\|_{H^1(\Omega_{\varepsilon_k})} \}$

es acotado, y sea $\{\varepsilon_k\}$ tal que $\varepsilon_k \rightarrow \varepsilon_0$. Entonces existen una subsucesión $\{\varepsilon_{k_n}\} \subset \{\varepsilon_k\}$ y una función $u_0 \in H^1(\Omega_{\varepsilon_0})$ tales que $u_{\varepsilon_{k_n}} \rightarrow u_0$ débilmente en H^1 y fuertemente en L^2 .

Demostración: Si $\varepsilon_k \rightarrow \varepsilon_0^+$, el resultado se deduce de aplicar el lema de Rellich a las restricciones $u_{\varepsilon_k}|_{\Omega_{\varepsilon_0}}$.

Si $\varepsilon_k \rightarrow \varepsilon_0^-$, definamos $\tilde{u}_{\varepsilon_k} = E_{\varepsilon_k} u_{\varepsilon_k}|_{\Omega_{\varepsilon_0}}$. Entonces

$$\|\tilde{u}_{\varepsilon_k}\|_{H^1(\Omega_{\varepsilon_0})} \leq C(\varepsilon_k) \|u_{\varepsilon_k}\|_{H^1(\Omega_{\varepsilon_k})} \leq C' \text{ fija.}$$

Por tanto, el lema de Rellich y el lema III.3.2 nos demuestran la proposición.

QED

El siguiente resultado describe una propiedad que podría llamarse de "clausura colectiva" de los operadores Δ_ε .

Proposición III.3.4 Sean $\varepsilon_k \rightarrow \varepsilon_0$ y $f_{\varepsilon_k} \in L^2(\Omega_{\varepsilon_k})$ tales que $f_{\varepsilon_k} \rightarrow f_{\varepsilon_0}$ débilmente en L^2 . Si $u_{\varepsilon_k} \in H^1(\Omega_{\varepsilon_k})$ es una solución de $-\Delta_{\varepsilon_k} u_{\varepsilon_k} = f_{\varepsilon_k}$ y $u_{\varepsilon_k} \rightarrow u_{\varepsilon_0}$ débilmente en H^1 y fuertemente en L^2 , entonces u_{ε_0} es una solución de $-\Delta_{\varepsilon_0} u_{\varepsilon_0} = f_{\varepsilon_0}$.

Demostración: Supongamos que $\varepsilon_k \rightarrow \varepsilon_0^+$. Sean $v \in H^1(\Omega_{\varepsilon_0})$ y

$\tilde{v} = E_{\varepsilon_0} v \in H^1(\mathbb{R}^2)$. Por hipótesis, se tiene

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \nabla u_{\varepsilon_k} \cdot \nabla \tilde{v} = \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} f_{\varepsilon_k} \tilde{v}.$$

Pero $\int_{\Omega_{\varepsilon_k} \setminus \Omega_{\varepsilon_0}} f_{\varepsilon_k} v \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$ y

$\int_{\Omega_{\varepsilon_k} \setminus \Omega_{\varepsilon_0}} \nabla u_{\varepsilon_k} \cdot \nabla v \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$. Por tanto,

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} u_{\varepsilon_k} \cdot \nabla \tilde{v} \rightarrow \int_{\Omega_{\varepsilon_0}} \nabla u_{\varepsilon_0} \cdot \nabla \tilde{v} = \int_{\Omega_{\varepsilon_0}} \nabla u_{\varepsilon_0} \cdot \nabla v$$

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} f_{\varepsilon_k} \tilde{v} \rightarrow \int_{\Omega_{\varepsilon_0}} f_{\varepsilon_0} \tilde{v} = \int_{\Omega_{\varepsilon_0}} f_{\varepsilon_0} v$$

Esto implica que $\int_{\Omega_{\varepsilon_0}} \nabla u_{\varepsilon_0} \cdot \nabla v = \int_{\Omega_{\varepsilon_0}} f_{\varepsilon_0} v$, y esta igualdad se

verifica para cada $v \in H^1(\Omega_{\varepsilon_0})$, como queríamos demostrar.

Si $\varepsilon_k \rightarrow \varepsilon_0^-$, la proposición se deduce inmediatamente de las definiciones de convergencia débil y del hecho de que $u_{\varepsilon_k} \rightarrow u_{\varepsilon_0}$ fuertemente en L^2 .

QED

III.4 Estimaciones sobre autovalores y autofunciones

Proposición III.4.1 El tercer autovalor $\lambda^{(3)}(\Omega_\varepsilon)$ está acotado inferiormente por una constante positiva cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Demostración: Sean $\lambda_\varepsilon = \lambda^{(2)}(\Omega_\varepsilon)$, $\mu_\varepsilon = \lambda^{(3)}(\Omega_\varepsilon)$, w_ε , v_ε las autofunciones correspondientes, $\int_{\Omega_\varepsilon} w_\varepsilon^2 = \int_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon^2 = 1$. Por las propiedades generales de Δ_ε , es claro que $\int_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon w_\varepsilon = 0$,

$$\int_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon = \int_{\Omega_\varepsilon} w_\varepsilon = 0.$$

Supongamos que existe una sucesión $\varepsilon_k \rightarrow 0$ tal que $\mu_k \rightarrow 0$; como $0 \leq \lambda_\varepsilon \leq \mu_\varepsilon$, también tenemos $\lambda_{\varepsilon_k} \rightarrow 0$. Podemos encontrar una subsucesión (que seguiremos llamando ε_k) tal que v_{ε_k} , w_{ε_k} convergen débilmente en $H^1(\Omega_0)$ y fuertemente en $L^2(\Omega_0)$ hacia sendas funciones v_0 , $w_0 \in H^1(\Omega_0)$. Se tiene

$$\int_{\Omega_0} |\nabla v_0|^2 \leq \liminf \int_{\Omega_0} |\nabla v_{\varepsilon_k}|^2 \leq \liminf \mu_{\varepsilon_k} = 0.$$

De la misma forma, $\int_{\Omega_0} |\nabla w_0|^2 = 0$. Por tanto, w_0 y v_0 son

localmente constantes en Ω_0 , y la convergencia es fuerte en $H^1(\Omega_0)$. Aplicando la Proposición III.2.4, tenemos

$$\|v_\varepsilon\|_{H^1(R_\varepsilon)} \leq M \left[\|v_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)} + \|v_\varepsilon\|_{H^1(Q_\varepsilon)} \right].$$

Como $v_{\varepsilon_k} \rightarrow v_0$ fuertemente en $H^1(\Omega_0)$ y $|Q_\varepsilon| \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, tenemos $\|v_{\varepsilon_k}\|_{H^1(Q_{\varepsilon_k})} \rightarrow 0$. Por tanto, $\|v_{\varepsilon_k}\|_{H^1(R_{\varepsilon_k})} \rightarrow 0$. Por la misma razón, $\|w_{\varepsilon_k}\|_{H^1(R_{\varepsilon_k})} \rightarrow 0$.

Observemos ahora lo siguiente:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon^2 = \int_{\Omega_\varepsilon} w_\varepsilon^2 = 1; \text{ por tanto, } \int_{\Omega_0} v_{\varepsilon_k}^2 \rightarrow 1, \int_{\Omega_0} w_{\varepsilon_k}^2 \rightarrow 1, \text{ ya que } \int_{R_{\varepsilon_k}} v_{\varepsilon_k}^2 \rightarrow 0, \int_{R_{\varepsilon_k}} w_{\varepsilon_k}^2 \rightarrow 0.$$

$$\int_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon = \int_{\Omega_\varepsilon} w_\varepsilon = 0 \text{ implica } \int_{\Omega_0} v_\varepsilon \rightarrow 0, \int_{\Omega_0} w_\varepsilon \rightarrow 0, \text{ ya que } \left| \int_{R_\varepsilon} v_\varepsilon \right| \leq |R_\varepsilon|^{\frac{1}{2}} \left[\int_{R_\varepsilon} v_\varepsilon^2 \right]^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

$$\int_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon w_\varepsilon = 0 \text{ implica } \int_{\Omega_0} v_{\varepsilon_k} w_{\varepsilon_k} \rightarrow 0, \text{ ya que } \int_{R_{\varepsilon_k}} v_{\varepsilon_k}^2 \rightarrow 0,$$

$$\int_{R_{\varepsilon_k}} w_{\varepsilon_k}^2 \rightarrow 0.$$

De todas estas relaciones podemos concluir que

$$\int_{\Omega_0} v_0 = \int_{\Omega_0} w_0 = 0, \int_{\Omega_0} v_0^2 = \int_{\Omega_0} w_0^2 = 1, \int_{\Omega_0} v_0 w_0 = 0.$$

Sin embargo, $\int_{\Omega_0} w_0 = 0$, $\int_{\Omega_0} w_0^2 = 1$ y el hecho de ser w_0 localmente constante implican que $\int_{\Omega_0^R} w_0 \neq \int_{\Omega_0^L} w_0$, como es fácil comprobar. Por lo tanto, v_0 debe ser cero en Ω_0 . Y esto está en contradicción con la igualdad $\int_{\Omega_0} v_0^2 = 1$.

QED

Proposición III.4.2 $\lambda_\varepsilon = \lambda^{(2)}(\Omega_\varepsilon) = 0(\varepsilon)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Demostración: Sea $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que $v \equiv |\Omega_0^L|^{-1}$ en Ω_0^L , $v \equiv |\Omega_0^R|^{-1}$ en Ω_0^R (tal función existe, ya que $\bar{\Omega}_0^L \cap \bar{\Omega}_0^R = \emptyset$)

Definamos $v_\varepsilon = v - |\Omega_\varepsilon|^{-1} \int_{\Omega_\varepsilon} v$; tenemos $\int_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon = 0$, v_ε satisface

a) $\int_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon^2 = \int_{\Omega_\varepsilon} v^2 - |\Omega_\varepsilon|^{-1} (\int_{\Omega_\varepsilon} v)^2 = \int_{\Omega_0} v^2 + \int_{R_\varepsilon} v^2 - |\Omega_\varepsilon|^{-1} (\int_{R_\varepsilon} v)^2$
 $\geq \int_{\Omega_0} v^2 - (1 + |\Omega_\varepsilon|^{-1} |R_\varepsilon|) |R_\varepsilon| \|v^2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$

b) $\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla v_\varepsilon|^2 = \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla v|^2 = \int_{R_\varepsilon} |\nabla v|^2 \leq \|\nabla v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}^2 |R_\varepsilon|$

Por la caracterización variacional de los autovalores,

$$\lambda_\varepsilon \leq \frac{\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla v_\varepsilon|^2}{\int_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon^2} \leq \frac{M_1 |R_\varepsilon|}{\int_{\Omega_0} v^2 - M_2 |R_\varepsilon|^2 |\Omega_\varepsilon|^{-1}}$$

donde $M_1 = \|\nabla v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}^2$, $M_2 = \|v^2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$.

QED

Proposición III.4.3 Toda autofunción w_ϵ correspondiente al autovalor λ_ϵ con la propiedad $\int_{\Omega_\epsilon} w_\epsilon^2 = 1$ satisface

(i) $\int_{R_\epsilon} w_\epsilon^2 = o(\epsilon)$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

(ii) $\int_{\Omega_\epsilon \setminus \Omega_\delta} w_\epsilon^2 \rightarrow 0$ cuando $\epsilon \rightarrow \delta^+$, $\delta \geq 0$.

(iii) $\int_{\Omega_0^R} w_\epsilon \neq 0$ si ϵ es suficientemente pequeño.

Demostración: (i) Por la desigualdad de Poincaré,

$$\int_{\Omega_0^R} (w_\epsilon - |\Omega_0^R|^{-1} (\int_{\Omega_0^R} w_\epsilon)^2) \leq [\lambda^{(2)}(\Omega_0^R)]^{-1} \int_{\Omega_0^R} |\nabla w_\epsilon|^2 \leq M_1 \lambda_\epsilon = o(\epsilon).$$

Llamemos $m_\epsilon^R = |\Omega_0^R|^{-1} \int_{\Omega_0^R} w_\epsilon$. Por el mismo argumento, si lla-

mamos $m_\epsilon^L = |\Omega_0^L|^{-1} \int_{\Omega_0^L} w_\epsilon$, tenemos $\int_{\Omega_0^L} (w_\epsilon - m_\epsilon^L)^2 = o(\epsilon)$.

Aplicando la Proposición III.2.4, obtenemos

$$\begin{aligned} \|w_\epsilon\|_{H^1(R_\epsilon)}^2 &\leq M \left[\lambda_\epsilon^2 \|w_\epsilon\|_{L^2(R_\epsilon)}^2 + \|w_\epsilon\|_{H^1(Q_\epsilon)}^2 \right] \leq \\ &\leq M \left[\lambda_\epsilon^2 + \|w_\epsilon - m_\epsilon^L\|_{H^1(Q_\epsilon^L)}^2 + \|m_\epsilon^L\|_{H^1(Q_\epsilon^L)}^2 + \|w_\epsilon - m_\epsilon^R\|_{H^1(Q_\epsilon^R)}^2 + \|m_\epsilon^R\|_{H^1(Q_\epsilon^R)}^2 \right] \\ &\leq M \left[\lambda_\epsilon + 2\lambda_\epsilon + o(\epsilon) \right] = o(\epsilon). \end{aligned}$$

ya que $\|w_\epsilon - m_\epsilon^L\|_{H^1(Q_\epsilon^L)}^2 \leq \lambda_\epsilon + \|w_\epsilon - m_\epsilon^L\|_{L^2(Q_\epsilon^L)}^2 = o(\epsilon)$.

Esto implica (i), en particular.

(ii) Si $\delta=0$, se trata precisamente de la parte (i). Si $\delta \neq 0$,

$$\int_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_\delta} w_\varepsilon^2 \leq |\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_\delta|^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_\delta} w_\varepsilon^4 \right]^{\frac{1}{2}} \leq |\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_\delta|^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} (1 + \lambda_\varepsilon)^2$$

por la Proposición III.2.3.

(iii) Supongamos lo contrario, es decir, que existe una sucesión $\varepsilon_k \rightarrow 0$ tal que $\int_{\Omega_0^R} w_{\varepsilon_k} = 0$. Como $\int_{\Omega_\varepsilon} w_\varepsilon = 0$, tenemos

$$\left[\int_{\Omega_0^L} w_{\varepsilon_k} \right]^2 = \left[\int_{\Omega_{\varepsilon_k} \setminus \Omega_0} w_{\varepsilon_k} \right]^2 \leq |\Omega_{\varepsilon_k} \setminus \Omega_0| \int_{\Omega_{\varepsilon_k} \setminus \Omega_0} w_{\varepsilon_k}^2 \leq |\Omega_{\varepsilon_k} \setminus \Omega_0|$$

que tiende a cero cuando $k \rightarrow \infty$. Por otra parte, $\int_{\Omega_0^R} w_{\varepsilon_k} = 0$

implica (Poincaré): $\int_{\Omega_0^R} |\nabla w_{\varepsilon_k}|^2 \geq \lambda^{(2)}(\Omega_0^R) \int_{\Omega_0^R} w_{\varepsilon_k}^2$.

Aplicando la desigualdad de Poincaré al dominio Ω_0^L

y definiendo $K = \max \{ \lambda^{(2)}(\Omega_0^L), \lambda^{(2)}(\Omega_0^R) \}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda^{(2)}(\Omega_0^L) \int_{\Omega_0^L} w_{\varepsilon_k}^2 + \lambda^{(2)}(\Omega_0^R) \int_{\Omega_0^R} w_{\varepsilon_k}^2 &\leq \\ &\leq K \int_{\Omega_0} |\nabla w_{\varepsilon_k}|^2 + \frac{\lambda^{(2)}(\Omega_0^L)}{|\Omega_0^L|} \left[\int_{\Omega_0^L} w_{\varepsilon_k} \right]^2 \end{aligned}$$

Pero $\int_{\Omega_0} |\nabla w_{\varepsilon_k}|^2 \leq \lambda_{\varepsilon_k} \rightarrow 0$. Los cálculos anteriores nos muestran que el segundo miembro de la desigualdad tiende a cero cuando $k \rightarrow \infty$, mientras que el primer miembro está acotado inferiormente por una constante positiva cuando $k \rightarrow \infty$,

ya que $\int_{R_{\varepsilon_k}} w_{\varepsilon_k}^2 \rightarrow 0$ por (i); por tanto, hemos llegado a una contradicción.

QED

Como $\lambda_{\varepsilon} \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, y $\lambda^{(3)}(\Omega_{\varepsilon})$ está acotado inferiormente por una constante positiva, vemos que es un autovalor simple cuando ε es suficientemente pequeño (digamos $0 \leq \varepsilon \leq \delta_0$). La parte (iii) de la proposición recién demostrada nos permite seleccionar una autofunción especial para cada $0 < \varepsilon \leq \delta_0$; definiremos w_{ε} como la autofunción normalizada tal que $\int_{\Omega_0^R} w_{\varepsilon} > 0$, para $0 < \varepsilon \leq \delta_0$.

Proposición III.4.4 Sea w_0 la función definida así:

$w_0 \equiv c_L$ en Ω_0^L ; $w_0 \equiv c_R$ en Ω_0^R , donde

$$c_L = - \left[\frac{1}{|\Omega_0^L|} \frac{|\Omega_0^R|}{|\Omega_0^L|} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad c_R = \left[\frac{1}{|\Omega_0^R|} \frac{|\Omega_0^L|}{|\Omega_0^R|} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Entonces, la familia $\varepsilon \mapsto w_{\varepsilon}$ es continua en $[0, \delta_0]$ débilmente en H^1 y fuertemente en L^2 , y

$$\int_{R_{\varepsilon}} w_{\varepsilon}^2 + \int_{\Omega_0} (w_{\varepsilon} - w_0)^2 = o(\varepsilon) \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Además, la función $\varepsilon \mapsto \lambda_{\varepsilon}$ es continua en $[0, \delta_0]$.

Demostración: Observemos primero que $\|w_{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega_{\varepsilon})}^2$ es aco-

tado, pues es precisamente $1 + \lambda_\varepsilon$.

Fijemos $\varepsilon_0 \geq 0$. Por la Proposición III.3.3, dada cualquier sucesión $\varepsilon_k \rightarrow \varepsilon_0^+$ existe una subsucesión (que seguiremos denotando ε_k) y existe una función $w \in H^1(\Omega_{\varepsilon_0})$ tal que $w_{\varepsilon_k} \rightarrow w$ débilmente en H^1 y fuertemente en L^2 ; podemos suponer también que λ_{ε_k} converge a cierto λ .

Cada w_{ε_k} es solución de $-\Delta_{\varepsilon_k} w_{\varepsilon_k} = \lambda_{\varepsilon_k} w_{\varepsilon_k}$.

Llamemos $f_{\varepsilon_k} = \lambda_{\varepsilon_k} w_{\varepsilon_k}$. Como $\lambda_{\varepsilon_k} \rightarrow \lambda$, tenemos

$f_{\varepsilon_k} \rightarrow \lambda w$ en L^2 cuando $k \rightarrow \infty$. Por la proposición III.3.4,

w es solución de $-\Delta_{\varepsilon_0} w = \lambda w$. Además, $\int_{\Omega_{\varepsilon_0}} w^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_{\varepsilon_0}} w_{\varepsilon_k}^2 =$
 $= 1$, pues $\int_{\Omega_\varepsilon} w_\varepsilon^2 = 1$ y $\int_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_{\varepsilon_0}} w_\varepsilon^2 \rightarrow 0$ por la Propo-

sición III.4.3. Esto implica que λ es un autovalor (y, por tanto, $\lambda = \lambda_{\varepsilon_0}$) y w es una autofunción correspondiente a λ_{ε_0} .

Si $\varepsilon_0 > 0$, w ha de ser igual a w_{ε_0} ó $-w_{\varepsilon_0}$

pues λ_{ε_0} es un autovalor simple. Además, $\int_{\Omega_0^R} w_{\varepsilon_k} > 0$

implica $\int_{\Omega_0^R} w \geq 0$, luego $\int_{\Omega_0^R} w > 0$ por la Proposición

III.4.3. Por lo tanto, concluimos que $w = w_{\varepsilon_0}$. Como este

límite es independiente de la subsucesión elegida y tenemos

la propiedad de "compacidad colectiva" (Proposición III.3.3), deducimos que $w_\varepsilon \rightarrow w_{\varepsilon_0}$ cuando $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0^+$.

Si $\varepsilon_0 = 0$, entonces $\lambda = 0$ y w es localmente constante. Teniendo en cuenta las propiedades $\int_{\Omega_0} w^2 = 1$, $\int_{\Omega_0} w = 0$, es fácil comprobar que $w = w_0$.

Si $\varepsilon_k \rightarrow \varepsilon_0^-$, puede aplicarse el mismo argumento con el fin de obtener w con la propiedad $-\Delta_{\varepsilon_0} w = \lambda w$, y es fácil verificar que $\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} (w_{\varepsilon_k} - w)^2 \rightarrow 0$ implica $\int_{\Omega_{\varepsilon_0}} w^2 = 1$ y $\int_{\Omega_{\varepsilon_0}} w \geq 0$. El resto del argumento es idéntico.

Nos queda demostrar la estimación $O(\varepsilon)$. Ya sabemos que $\int_{R_\varepsilon} w_\varepsilon^2 = O(\varepsilon)$ y, por la desigualdad de Schwarz, tenemos también $\int_{R_\varepsilon} w_\varepsilon = O(\varepsilon)$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} w_\varepsilon w_0 &= \left(\frac{|\Omega_0^L|}{|\Omega_0^R| |\Omega_0^L|} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\Omega_0^R} w_\varepsilon - \left(\frac{|\Omega_0^R|}{|\Omega_0^R| |\Omega_0^L|} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\Omega_0^L} w_\varepsilon = \\ &= \left(\frac{|\Omega_0^L|}{|\Omega_0^R| |\Omega_0^L|} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\Omega_0^R} w_\varepsilon + O(\varepsilon) \quad (\text{esto se obtiene expresando}) \\ \int_{\Omega_0^L} w_\varepsilon &= - \int_{R_\varepsilon} w_\varepsilon - \int_{\Omega_0^R} w_\varepsilon \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos

$$\int_{\Omega_0^R} (w_\varepsilon - |\Omega_0^R|^{-1} \int_{\Omega_0^R} w_\varepsilon)^2 = \int_{\Omega_0^R} \left[w_\varepsilon - \frac{1}{|\Omega_0^R|} \left(\frac{|\Omega_0^R| |\Omega_0^L|}{|\Omega_0^L|} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\Omega_0^L} w_\varepsilon + O(\varepsilon) \right]^2$$

$$= \int_{\Omega_0} (w_\varepsilon - w_0)^2 + o(\varepsilon).$$

El mismo argumento nos proporciona una fórmula similar para Ω_0^L . Combinando ambos resultados, obtenemos

$$\|w_\varepsilon - \langle w_\varepsilon, w_0 \rangle w_0\|_{L^2(\Omega_0)}^2 = o(\varepsilon).$$

($\langle \dots \rangle$: producto escalar en $L^2(\Omega_0)$).

El resultado que queremos demostrar puede expresarse como $\|w_\varepsilon - w_0\|_{L^2(\Omega_0)}^2 = o(\varepsilon)$. Esto resulta ser una consecuencia de las dos estimaciones

$$0 \leq 1 - \|w_\varepsilon\|^2 = o(\varepsilon)$$

$$\|w_\varepsilon - \langle w_\varepsilon, w_0 \rangle w_0\|^2 = o(\varepsilon)$$

mediante ciertas consideraciones geométricas que aparecen en el siguiente

Lema III.4.5 Sea H un espacio de Hilbert, sean $w, w_0 \in H$ tales que $\|w_0\|^2 = 1$, $w_\varepsilon \rightarrow w_0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ y

(i) $0 \leq 1 - \|w_\varepsilon\|^2 = o(\varepsilon)$

(ii) Existen números $\gamma_\varepsilon \in \mathbb{R}$ tales que $\|w_\varepsilon - \gamma_\varepsilon w_0\|^2 = o(\varepsilon)$

Entonces, $\|w_\varepsilon - w_0\|^2 = o(\varepsilon)$

Demostración: Podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$\gamma_\varepsilon = \langle w_\varepsilon, w_0 \rangle \text{ en (ii), pues } \|w_\varepsilon - \langle w_\varepsilon, w_0 \rangle w_0\|^2 \leq \|w_\varepsilon - \gamma w_0\|^2$$

para todo número real γ .

Entonces, $\|w_\varepsilon - \langle w_\varepsilon, w_0 \rangle w_0\|^2 = \|w_\varepsilon\|^2 - \langle w_\varepsilon, w_0 \rangle^2 = o(\varepsilon)$,
lo que implica $-\langle w_\varepsilon, w_0 \rangle^2 = o(\varepsilon) - \|w_\varepsilon\|^2$.

Por tanto, como $0 \leq \langle w_\varepsilon, w_0 \rangle \leq \|w_\varepsilon\| \|w_0\| \leq 1$, tenemos

$$\begin{aligned} \|w_\varepsilon - w_0\|^2 &= \|w_\varepsilon\|^2 + \|w_0\|^2 - 2\langle w_\varepsilon, w_0 \rangle \leq \|w_\varepsilon\|^2 + 1 - 2\langle w_\varepsilon, w_0 \rangle^2 \leq \\ &\leq \|w_\varepsilon\|^2 + 1 + o(\varepsilon) - 2\|w_\varepsilon\|^2 = -\|w_\varepsilon\|^2 + 1 + o(\varepsilon) = o(\varepsilon). \end{aligned}$$

QED

III.5 Continuidad (en ε) de los operadores \hat{K}_ε

Debido al hecho de que $\lambda^{(3)}(\Omega_\varepsilon)$ está acotado inferiormente por una constante estrictamente positiva, el operador \hat{K}_ε definido en el Capítulo II está acotado en norma cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ por una constante que denotaremos siempre C_1 : $\|\hat{K}_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(\hat{H}_\varepsilon, \hat{L}_\varepsilon)} \leq C_1$ para $0 \leq \varepsilon \leq \delta_0$.

Sea P_ε la proyección definida en el Capítulo II.

Lema III.5.1 Supongamos que $\varepsilon_k \rightarrow \varepsilon_0$, y $f_{\varepsilon_k} \rightarrow f_{\varepsilon_0}$,

$g_{\varepsilon_k} \rightarrow g_{\varepsilon_0}$ fuertemente en L^2 . Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} f_{\varepsilon_k} &\rightarrow \int_{\Omega_{\varepsilon_0}} f_{\varepsilon_0} ; \quad \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} f_{\varepsilon_k} w_{\varepsilon_k} \rightarrow \int_{\Omega_{\varepsilon_0}} f_{\varepsilon_0} w_{\varepsilon_0} \\ g_{\varepsilon_k} \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} f_{\varepsilon_k} &\xrightarrow{L^2} g_{\varepsilon_0} \int_{\Omega_{\varepsilon_0}} f_{\varepsilon_0} ; \quad g_{\varepsilon_k} \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} f_{\varepsilon_k} w_{\varepsilon_k} \xrightarrow{L^2} g_{\varepsilon_0} \int_{\Omega_{\varepsilon_0}} f_{\varepsilon_0} w_{\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

Demostración: La primera relación es consecuencia directa de la definición de convergencia en L^2 . La segunda resulta de aplicar la desigualdad de Schwarz y la Proposición III.4.3. Las dos últimas se deducen de forma análoga; basta considerar los multiplicadores de g_{ϵ_k} como una sucesión convergente de números reales.

QED

Proposición III.5.2 Supongamos que $\epsilon_k \rightarrow \epsilon_0$ y $g_{\epsilon_k} \rightarrow g_{\epsilon_0}$ fuertemente en L^2 . Entonces $P_{\epsilon_k} g_{\epsilon_k} \xrightarrow{L^2} P_{\epsilon_0} g_{\epsilon_0}$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Además, si $\epsilon_0 = 0$, se tiene

$$\|P_{\epsilon} g_{\epsilon} - P_0 g_0\|_{L^2(\Omega_0)} \leq M \epsilon^{\frac{1}{2}} \|g_{\epsilon}\|_{L^2(\Omega_{\epsilon})} + \|g_{\epsilon} - g_0\|_{L^2(\Omega_0)}.$$

Demostración: Escribamos $P_{\epsilon_k} g_{\epsilon_k} = \alpha_{\epsilon_k} + \beta_{\epsilon_k} w_{\epsilon_k}$,

$$\text{donde } \alpha_{\epsilon_k} = |\Omega_{\epsilon_k}|^{-1} \int_{\Omega_{\epsilon_k}} g_{\epsilon_k}, \quad \beta_{\epsilon_k} = \int_{\Omega_{\epsilon_k}} w_{\epsilon_k} g_{\epsilon_k}.$$

Basta entonces aplicar el lema anterior junto con la relación $|\Omega_{\epsilon_k}| \rightarrow |\Omega_{\epsilon_0}|$.

Demostración de la segunda parte:

$$P_{\epsilon} g_{\epsilon} - P_0 g_0 = (P_{\epsilon} - P_0) g_{\epsilon} + P_0 (g_{\epsilon} - g_0).$$

$$\begin{aligned} (P_{\epsilon} - P_0) g_{\epsilon} &= |\Omega_{\epsilon}|^{-1} \int_{\Omega_{\epsilon}} g_{\epsilon} - |\Omega_0|^{-1} \int_{\Omega_0} g_{\epsilon} + w_{\epsilon} \int_{\Omega_{\epsilon}} g_{\epsilon} w_{\epsilon} \\ &\quad - w_0 \int_{\Omega_0} g_{\epsilon} w_0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| |\Omega_\varepsilon|^{-1} \int_{\Omega_\varepsilon} g_\varepsilon - |\Omega_0|^{-1} \int_{\Omega_0} g_\varepsilon \right| = \\
& = \left| |\Omega_\varepsilon|^{-1} |\Omega_0|^{-1} \left[\int_{\Omega_0} g_\varepsilon (|\Omega_0| - |\Omega_\varepsilon|) + \int_{R_\varepsilon} g_\varepsilon |\Omega_0| \right] \right| \leq \\
& \leq M' (\|g_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_0)} |\Omega_\varepsilon|^{\frac{1}{2}} + \|g_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)} |\Omega_\varepsilon|^{\frac{1}{2}}) \leq M \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|g_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} . \\
& \|w_\varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} g_\varepsilon w_\varepsilon - w_0 \int_{\Omega_0} g_\varepsilon w_0\|_{L^2(\Omega_0)} = \\
& = \|w_\varepsilon \left[\int_{\Omega_0} g_\varepsilon (w_\varepsilon - w_0) + \int_{R_\varepsilon} g_\varepsilon w_\varepsilon \right] + \left(\int_{\Omega_0} g_\varepsilon w_0 \right) (w_\varepsilon - w_0)\|_{L^2(\Omega_0)} \leq \\
& \leq \|g_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_0)} \|w_\varepsilon - w_0\|_{L^2(\Omega_0)} + \|g_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)} \|w_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)} + \\
& \quad + \|g_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_0)} \|w_\varepsilon - w_0\|_{L^2(\Omega_0)} , \\
& \text{y } \|P_0(g_\varepsilon - g_0)\|_{L^2(\Omega_0)} \leq \|g_\varepsilon - g_0\|_{L^2(\Omega_0)}
\end{aligned}$$

Aplicando la Proposición III.4.4, obtenemos el resultado.

QED

Proposición III.5.3: Supongamos que $\varepsilon_k \rightarrow \varepsilon_0$, $f_{\varepsilon_k} \rightarrow f_{\varepsilon_0}$

fuertemente en L^2 y sean $q_{\varepsilon_k} \in L^\infty(\Omega_{\varepsilon_k})$ tales que

$$\|q_{\varepsilon_k}\|_{L^\infty(\Omega_{\varepsilon_k})} \leq \tilde{k}_1, \text{ donde } \tilde{k}_1 < C_1, \text{ y } q_{\varepsilon_k} \rightarrow q_{\varepsilon_0} \text{ en casi}$$

todo Ω_{ε_0} . Entonces se tiene:

$$(i) \quad \hat{\kappa}_{\varepsilon_k} (I - P_{\varepsilon_k}) f_{\varepsilon_k} \rightarrow \hat{\kappa}_{\varepsilon_0} (I - P_{\varepsilon_0}) f_{\varepsilon_0}$$

(ii) Si \hat{v}_{ϵ_k} es la solución única de

$$\hat{v}_{\epsilon_k} = \hat{K}_{\epsilon_k} (I - P_{\epsilon_k})(f_{\epsilon_k} + q_{\epsilon_k} v_{\epsilon_k}),$$

entonces $\hat{v}_{\epsilon_k} \rightarrow \hat{v}_{\epsilon_0}$ fuertemente en L^2 y débilmente en H^1 .

Además, si $\epsilon_0 = 0$ y f_0 es localmente constante, se verifican las siguientes estimaciones:

$$(iii) \quad \|\hat{K}_{\epsilon}^{(I-P_{\epsilon})} f_{\epsilon}\|_{H^1(\Omega_{\epsilon})} \leq M \epsilon^{\frac{1}{2}} \|f_{\epsilon}\|_{L^2(\Omega_{\epsilon})} + \\ + 2C_1 \|f_{\epsilon} - f_0\|_{L^2(\Omega_0)} + C_1 \|f_{\epsilon}\|_{L^2(R_{\epsilon})}.$$

$$(iv) \quad \|\hat{v}_{\epsilon}\|_{H^1(\Omega_{\epsilon})} \leq (1 - C_1 \tilde{k}_1)^{-1} [C_1 \|f_{\epsilon}\|_{L^2(R_{\epsilon})} + \\ + 2C_1 \|f_{\epsilon} - f_0\|_{L^2(\Omega_0)} + M \epsilon^{\frac{1}{2}} \|f_{\epsilon}\|_{L^2(\Omega_{\epsilon})}]$$

Observación: Si $\epsilon_k \rightarrow \epsilon_0^-$, la expresión " $q_{\epsilon_k} \rightarrow q_{\epsilon_0}$ en casi

todo Ω_{ϵ_0} " significa " $\tilde{q}_{\epsilon_k} \rightarrow q_{\epsilon_0}$ en casi todo Ω_{ϵ_0} ",

donde \tilde{q}_{ϵ_k} es la función definida en R^2 extendiendo $\tilde{q}_{\epsilon_k} = 0$

en el exterior de Ω_{ϵ_k} .

Demostración: i) Por la proposición anterior, tenemos

$$(I - P_{\epsilon_k}) f_{\epsilon_k} \rightarrow (I - P_{\epsilon_0}) f_{\epsilon_0}. \text{ Llamemos } \hat{u}_{\epsilon_k} = \hat{K}_{\epsilon_k} (I - P_{\epsilon_k}) f_{\epsilon_k}$$

Entonces $-\Delta_{\varepsilon_k} u_{\varepsilon_k} = (I - P_{\varepsilon_k}) f_{\varepsilon_k}$, y, además, $\|\hat{u}_{\varepsilon_k}\|_{H^1(\Omega_{\varepsilon_k})}$

está acotado superiormente por $C_1 \|f_{\varepsilon_k}\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_k})}$. Por tanto,

existe una subsucesión (que seguiremos llamando ε_k) tal que

$\hat{u}_{\varepsilon_k} \rightarrow u_0 \in H^1(\Omega_{\varepsilon_0})$ débilmente en H^1 y fuertemente en L^2 .

Por la Proposición III.3.4, u_0 es solución de

$-\Delta_{\varepsilon_0} u_0 = (I - P_{\varepsilon_0}) f_{\varepsilon_0}$, y es fácil comprobar que $\int_{\Omega_{\varepsilon_0}} u_0 = 0$,

$\int_{\Omega_{\varepsilon_0}} u_0 w_0 = 0$. Esto implica $u_0 \in \hat{H}_{\varepsilon_0}$, y, por unicidad, se debe satisfacer $u_0 = \hat{u}_{\varepsilon_0}$.

(ii) Como $\tilde{k}_1 < C_1$, la existencia y unicidad de \hat{v}_{ε_k}

no presentan problema. Además,

$$\|v_{\varepsilon_k}\|_{H^1(\Omega_{\varepsilon_k})} \leq C_1 \|f_{\varepsilon_k}\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_k})} + C_1 \tilde{k}_1 \|\hat{v}_{\varepsilon_k}\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_k})},$$

luego tenemos una acotación a priori para $\|v_{\varepsilon_k}\|_{H^1(\Omega_{\varepsilon_k})}$

Tomando subsucesiones, podemos suponer que $\hat{v}_{\varepsilon_k} \rightarrow v_0 \in H^1(\Omega_{\varepsilon_0})$

débilmente en H^1 , fuertemente en L^2 y en casi todo Ω_{ε_0} ; si

$\varepsilon_k \rightarrow \varepsilon_0^-$, aplíquese la observación hecha antes. Vamos a demos-

trar ahora que $q_{\varepsilon_k} \hat{v}_{\varepsilon_k} \rightarrow q_{\varepsilon_0} v_0$ fuertemente en L^2 :

$$\begin{aligned} \|q_{\varepsilon_k} \hat{v}_{\varepsilon_k} - q_{\varepsilon_0} v_0\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_0})} &\leq \| (q_{\varepsilon_k} - q_{\varepsilon_0}) v_0 \|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_0})} + \\ &\quad \|q_{\varepsilon_k}\|_{L^\infty(\Omega_{\varepsilon_k})} \|\hat{v}_{\varepsilon_k} - v_0\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_0})} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

por el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue. Si

$\varepsilon_k \rightarrow \varepsilon_0^-$, puede aplicarse el mismo argumento a las extensiones $\tilde{q}_{\varepsilon_k}, \tilde{v}_{\varepsilon_k}$, obteniendo

$$\|q_{\varepsilon_k} \hat{v}_{\varepsilon_k} - q_{\varepsilon_0} v_0\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_k})} = \|\tilde{q}_{\varepsilon_k} \tilde{v}_{\varepsilon_k} - q_{\varepsilon_0} v_0\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_0})} \rightarrow 0.$$

Aplicando la parte (i), vemos que

$$v_0 = \hat{\mathcal{K}}_{\varepsilon_0} (I - P_{\varepsilon_0})(f_{\varepsilon_0} + q_{\varepsilon_0} v_0);$$

por unicidad, v_0 ha de ser igual a \hat{v}_{ε_0} , y este límite no

depende de la subsucesión elegida. Esto concluye la demostración de (ii).

(iii) Llamemos $\hat{u}_\varepsilon = \hat{\mathcal{K}}_\varepsilon (I - P_\varepsilon) f_\varepsilon$. Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} \|\hat{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} &\leq C_1 \|(I - P_\varepsilon) f_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \\ &\leq C_1 \|(I - P_\varepsilon) f_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)} + C_1 \|(I - P_\varepsilon) f_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_0)}. \end{aligned}$$

$$\|(I - P_\varepsilon) f_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)} \leq \|f_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)} + |\Omega_\varepsilon|^{-1} \left| \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon \right| |R_\varepsilon|^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \|w_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)} \left| \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon w_\varepsilon \right| \leq \|f_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)} + M_2 \|f_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

$$\|(I-P_\varepsilon)f_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_0)} = \|(I-P_\varepsilon)f_\varepsilon - (I-P_0)f_0\|_{L^2(\Omega_0)} =$$

$$= \|f_\varepsilon - f_0 - (P_\varepsilon f_\varepsilon - P_0 f_0)\|_{L^2(\Omega_0)} \leq$$

$$\leq 2 \|f_\varepsilon - f_0\|_{L^2(\Omega_0)} + M_3 \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|f_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$$

por la Proposición III.5.2.

$$(iv) \quad \hat{v}_\varepsilon = \hat{K}_\varepsilon(I-P_\varepsilon)(f_\varepsilon + q_\varepsilon \hat{v}_\varepsilon) \text{ implica}$$

$$\hat{v}_\varepsilon - \hat{K}_\varepsilon(I-P_\varepsilon)q_\varepsilon \hat{v}_\varepsilon = \hat{K}_\varepsilon(I-P_\varepsilon)f_\varepsilon. \text{ Aplicando (iii), obtenemos}$$

$$\|\hat{v}_\varepsilon - \hat{K}_\varepsilon(I-P_\varepsilon)q_\varepsilon \hat{v}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \|\hat{K}_\varepsilon(I-P_\varepsilon)f_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq$$

$$\leq M \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|f_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + 2C_1 \|f_\varepsilon - f_0\|_{L^2(\Omega_0)} + C_1 \|f_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)}.$$

$$\text{Por lo tanto, } \|\hat{v}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C_1 \tilde{k}_1 \|\hat{v}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} +$$

$$+ M \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|f_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + 2C_1 \|f_\varepsilon - f_0\|_{L^2(\Omega_0)} + C_1 \|f_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)},$$

como queríamos demostrar. Solamente nos queda probar que si f_0 es localmente constante, se tiene $(I-P_0)f_0 = 0$, hecho que hemos utilizado en varios puntos de la demostración:

Lema III.5.4: Si $f_0 \in L^2(\Omega_0)$ es localmente constante, entonces $(I-P_0)f_0 = 0$.

Demostración: P_0 es la proyección sobre el subespacio engendrado por $\{1, w_0\}$, que coincide obviamente con el subespacio engendrado por $\chi_{\Omega_0^R}, \chi_{\Omega_0^L}$ (funciones características).

Y decir que f_0 es localmente constante es equivalente a decir que f_0 es combinación lineal de $\chi_{\Omega_0^R}$ y $\chi_{\Omega_0^L}$.

Por tanto, $P_0 f_0 = f_0$.

QED

III.6 Nota bibliográfica

La mayor parte de la literatura que trata de perturbaciones de dominios considera únicamente el problema de Dirichlet, o problemas generales de contorno con perturbaciones de la frontera de tipo muy regular (convergencia de los vectores normales, etc.; véase, por ejemplo, Fujiwara y Ozawa [15]). Ultimamente se han desarrollado ciertos métodos abstractos considerando familias de formas bilineales coercivas en espacios de Hilbert y los problemas de contorno asociados: Nečas [25], Babuška-Výborný [31], Grigorieff [16], Stummel [29, 30]. Stummel, generalizando ciertas ideas de Grigorieff, define algunos conceptos de convergencia de

familias de funciones parecidos a los nuestros, aunque no idénticos (por ejemplo, Stummel impone la condición

$$\|f_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)} \rightarrow 0 \text{ en la definición de convergencia fuerte),}$$

y sus resultados pueden aplicarse únicamente a familias de dominios que gozan de una "propiedad uniforme del segmento"

de la que carecen nuestros dominios Ω_ε . Rauch y Taylor [27]

estudian familias decrecientes de dominios imponiendo la existencia de operadores de extensión uniformemente acotados en norma. Finalmente, Lobo Hidalgo y Sánchez-Palencia [22]

consideran las propiedades espectrales del problema de

Neumann con el tipo más general de perturbación (su única

hipótesis es $|\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0| \rightarrow 0$) a través del análisis de sus

familias espectrales $E_\varepsilon(\lambda)$; entre otras cosas, demuestran

que todo autovalor de Δ_0 es punto de acumulación de autovalores de Δ_ε .

CAPITULO IV

REGULARIDAD DE LAS ECUACIONES DE BIFURCACION

Los resultados obtenidos en el Capítulo III nos permiten demostrar que las ecuaciones de bifurcación definidas en el Capítulo II, junto con sus derivadas en α, β, λ son continuas en ε . La demostración para las funciones mismas y sus derivadas primeras no es muy difícil, e incluso puede llevarse a cabo bajo condiciones mucho más generales (ver Hale y Vegas [18] y los comentarios del Capítulo XI). Sin embargo, al tratar las derivadas de orden superior, la aplicación del Teorema de Inclusión de Sobolev resulta esencial, y la demostración de continuidad para un cierto valor ε_0 cambia de forma crucial según se tenga $\varepsilon_0 > 0$ ó $\varepsilon_0 = 0$. Si $\varepsilon_0 > 0$, el argumento es sencillo, pues disponemos de uniformidad local para las normas de las inclusiones de Sobolev; pero si $\varepsilon_0 = 0$, tal uniformidad desaparece, y nos vemos obligados a utilizar las estimaciones de tipo $O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$ obtenidas en el capítulo anterior.

En primer lugar enunciaremos el teorema. La demostración consistirá en la serie de proposiciones subsiguientes.

IV.1 Enunciado del teorema de continuidad

Teorema IV.1.1 Sea Ω_ε la familia de dominios definida en el Capítulo III, y sea $f: \mathcal{A} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^{k+1} tal que $D^2 f, \dots, D^{k+1} f$ son acotadas en $\mathcal{A} \times \mathbb{R}$, $|f_u(\lambda, u)| \leq k_1 < 1/(2C_1)$, $|f_\lambda(\lambda, u)| \leq k_2 |u| + k_3$, donde k_2, k_3 son constantes y $C_1 = \inf \{ \|\hat{K}_\varepsilon\| : 0 \leq \varepsilon \leq \delta_0 \}$.

Entonces, las funciones G y H definidas por (II.4) y (II.5) son de clase C^k en α, β, λ , y G, H y todas sus derivadas en α, β, λ hasta el orden k son continuas en ε .

Recordemos la definición de $\hat{u}(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon)$:

$$\hat{u}(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon) = \hat{K}_\varepsilon (I - P_\varepsilon) f(\lambda, \alpha + \beta w_\varepsilon + \hat{u}(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon)).$$

IV.2 Continuidad de $u(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon)$ en ε .

Proposición IV.2.1 Si f satisface las hipótesis del Teorema IV.1.1, la aplicación $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathcal{A} \rightarrow H^1(\Omega_\varepsilon)$ dada por $(\alpha, \beta, \lambda) \mapsto \hat{u}(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon)$ es de clase C^k , y, para cada $r = (r_1, r_2, r_3)$ con $|r| = r_1 + r_2 + r_3 \in \{0, 1, \dots, k\}$, $D^r u(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon)$ es continua débilmente en H^1 y fuertemente en L^2 .

Además, para cada $p > 2$ se tiene

$$\|u(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = O(\varepsilon^{1/p}) \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0, \text{ uniformemente}$$

en α, β, λ en conjuntos acotados. Esta estimación se verifica también para $p=2$ si $|r|=0$ ó $|r|=1$.

Demostración: En el Capítulo II dimos la demostración de regularidad con respecto a α, β, λ . Para demostrar las estimaciones utilizaremos el método de inducción.

$|r| = 0$: Llamemos $\hat{u}_\varepsilon = \hat{u}(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon)$. \hat{u}_ε satisface

$$\hat{u}_\varepsilon = \hat{K}_\varepsilon(I - P_\varepsilon)f(\lambda, \alpha + \beta w_\varepsilon + \hat{u}_\varepsilon).$$

Por el teorema del valor medio, podemos escribir

$$f(\lambda, \alpha + \beta w_\varepsilon + \hat{u}_\varepsilon) = f(\lambda, \alpha + \beta \tilde{w}_0) + f_u(\lambda, \alpha + \beta \tilde{w}_0 + m_\varepsilon(\lambda, x)(\beta(w_\varepsilon - \tilde{w}_0) + \hat{u}_\varepsilon)),$$

donde $m_\varepsilon(\lambda, x)$ es una función medible y $\tilde{w}_0 = E_0 w_0$. Esto

implica

$$\begin{aligned} \|\hat{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} &\leq \\ &\leq (1 - c_1 k_1)^{-1} \left[c_1 \|f(\lambda, \alpha + \beta \tilde{w}_0)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + c_1 k_1 \|\beta(w_\varepsilon - \tilde{w}_0)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \right]. \end{aligned}$$

Por tanto, $\|\hat{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$ es acotado si α, β, λ lo son.

Sean $\alpha_k \rightarrow \alpha$, $\beta_k \rightarrow \beta$, $\lambda_k \rightarrow \lambda$, $\varepsilon_k \rightarrow \varepsilon_0$, $\hat{u}_{\varepsilon_k} =$

$= \hat{u}(\alpha_k, \beta_k, \lambda_k, \varepsilon_k)$. Tomando subsucesiones si es necesario,

podemos suponer que $\hat{u}_{\varepsilon_k} \rightarrow u_0 \in H^1(\Omega_{\varepsilon_0})$ débilmente en H^1 ,

fuertemente en L^2 y en casi todo Ω_{ε_0} . Sea $f_{\varepsilon_k} =$

$$= f(\lambda_k, \alpha_k + \beta_k w_{\varepsilon_k} + \hat{u}_{\varepsilon_k}), \quad f_{\varepsilon_0} = f(\lambda, \alpha + \beta w_{\varepsilon_0} + u_0). \text{ Entonces}$$

$f_{\varepsilon_k} \rightarrow f_{\varepsilon_0}$ fuertemente en L^2 debido al crecimiento lineal

de $f(\lambda, \cdot)$ y la continuidad de f . Por la Proposición III.5.3,

tenemos $u_0 = \hat{K}_{\varepsilon_0}(I-P_{\varepsilon_0})f(\lambda, \alpha+\beta w_{\varepsilon_0} + u_0)$, luego $u_0 = \hat{u}_{\varepsilon_0}$ por unicidad. Por consiguiente, $\hat{u}(\alpha_k, \beta_k, \lambda_k, \varepsilon_k) \rightarrow \hat{u}(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon_0)$ débilmente en H^1 y fuertemente en L^2 .

Si $\varepsilon_0 = 0$, definimos $q_\varepsilon = f_u(\lambda, \alpha+\beta \tilde{w}_0 + m_\varepsilon)$,

$$f_\varepsilon = f(\lambda, \alpha+\beta \tilde{w}_0) + f_u(\lambda, \alpha+\beta \tilde{w}_0 + m_\varepsilon)\beta(w_\varepsilon - \tilde{w}_0), \quad f_0 = f(\lambda, \alpha+\beta w_0).$$

Como \tilde{w}_0 es una función fija de $H^1(\mathbb{R}^2)$, para cualquier $\rho > 0$ fijo se tiene $\|f(\lambda, \alpha+\beta \tilde{w}_0)\|_{L^2(\mathbb{R}_\varepsilon)} \leq M_1 |\mathbb{R}_\varepsilon|^{\frac{1}{2}} = M_2 \varepsilon^{\frac{1}{2}}$ si $|\alpha|, |\beta|, |\lambda| \leq \rho$,

$$\|w_\varepsilon - w_0\|_{L^2(\mathbb{R}_\varepsilon)} \leq \|w_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}_\varepsilon)} + \|\tilde{w}_0\|_{L^2(\mathbb{R}_\varepsilon)} = o(\varepsilon^{\frac{1}{2}}) \text{ si } |\alpha|, |\beta|, |\lambda| \leq \rho.$$

Esto implica que $\|f_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}_\varepsilon)} = o(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$. Además, $\|f_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$

es uniformemente acotado para $|\alpha|, |\beta|, |\lambda| \leq \rho$, y, por otra parte,

$$\|f_\varepsilon - f_0\|_{L^2(\Omega_0)} = \|f_u(\lambda, \alpha+\beta \tilde{w}_0 + m_\varepsilon)\beta(w_\varepsilon - \tilde{w}_0)\|_{L^2(\Omega_0)} = o(\varepsilon^{\frac{1}{2}}).$$

Por lo tanto, $\|\hat{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = o(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$ (uniformemente en $|\alpha|, |\beta|, |\lambda| \leq \rho$).

$|r| = 1$: Llamemos $\hat{u}_\varepsilon = \hat{u}(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon)$, $\hat{v}_\varepsilon = D\hat{u}_\varepsilon =$

$(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \alpha}, \frac{\partial \hat{u}}{\partial \beta}, \frac{\partial \hat{u}}{\partial \lambda})^T(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon)$. Tenemos entonces

$$\hat{v}_\varepsilon = \hat{K}_\varepsilon(I-P_\varepsilon) \begin{pmatrix} f_u(\lambda, \alpha+\beta w_\varepsilon + \hat{u}_\varepsilon) \\ f_u(\lambda, \alpha+\beta w_\varepsilon + \hat{u}_\varepsilon)w_\varepsilon \\ f_\lambda(\lambda, \alpha+\beta w_\varepsilon + \hat{u}_\varepsilon) \end{pmatrix} + f_u(\lambda, \alpha+\beta w_\varepsilon + \hat{u}_\varepsilon)\hat{v}_\varepsilon.$$

Como hicimos antes, podemos aplicar la Proposición III.5.3 definiendo

$$f_\varepsilon = \begin{bmatrix} f_u(\lambda, \alpha + \beta w_\varepsilon + \hat{u}_\varepsilon) \\ f_u(\lambda, \alpha + \beta w_\varepsilon + \hat{u}_\varepsilon) w_\varepsilon \\ f_\lambda(\lambda, \alpha + \beta w_\varepsilon + \hat{u}_\varepsilon) \end{bmatrix}, \quad f_0 = \begin{bmatrix} f_u(\lambda, \alpha + \beta w_0) \\ f_u(\lambda, \alpha + \beta w_0) w_0 \\ f_\lambda(\lambda, \alpha + \beta w_0) \end{bmatrix}, \quad q_\varepsilon = f_u(\lambda, \alpha + \beta w_\varepsilon + \hat{u}_\varepsilon)$$

$\|f_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)} = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$ ya que f_u es uniformemente acotada,

f_λ crece de forma lineal y $\|w_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)} = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$. Como todas

las derivadas segundas son acotadas y $\|w_\varepsilon - w_0\|_{L^2(\Omega_0)} = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$,

tenemos $\|f_\varepsilon - f_0\|_{L^2(\Omega_0)} = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$. Estas estimaciones, y la

observación de que $\|f_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$ es acotado nos dan el resultado.

El caso general: $|r| \geq 2$: Supongamos que la estimación $\|D^j \hat{u}(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = O(\varepsilon^{1/p})$ se satisface para todo $p > 2$, $0 \leq j \leq k-1$. (El motivo por el cual no podemos tomar $p=2$ aparecerá en la demostración.)

Por la Proposición III.2.3,

$$\|D^j \hat{u}\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} \leq M_p \varepsilon^{(1/p) - (1/2)} \|D^j u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$$

Además, tenemos $\|w_\varepsilon\|_{L^p(R_\varepsilon)} + \|w_\varepsilon - w_0\|_{L^p(\Omega_0)} = O(\varepsilon^{1/p})$,

por tanto, $\|w_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)}$ es acotado cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ para

cada $p > 2$ fijo, y, si $j=1$, $\|\hat{u}\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} = o(\varepsilon^{1/p})$.

Fijemos $\bar{p} > 2$. La expresión general de una derivada

de orden k (que denotaremos $D^{k\hat{u}}$) es

$$D^{k\hat{u}} = \hat{K}_{\varepsilon(I-P_\varepsilon)} \left[\sum f_\varepsilon + f_u(\lambda, \alpha + \beta w_\varepsilon + \hat{u}) D^{k\hat{u}} \right]$$

donde las funciones f representan términos del tipo

$$M_{f_{\lambda \dots \lambda u \dots u}}(\lambda, \alpha + \beta w_\varepsilon + \hat{u}) \left(1 + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \alpha}\right)^{m_1} \left(w_\varepsilon + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \beta}\right)^{m_2} \left(\frac{\partial^{r_1} \hat{u}}{\partial \alpha^{r_1}}\right)^{s_1} \left(\frac{\partial^{r_2} \hat{u}}{\partial \beta^{r_2}}\right)^{s_2} \times \\ \times \left(\frac{\partial^{r_3} \hat{u}}{\partial \lambda^{r_3}}\right)^{s_3},$$

donde $m_1 + m_2 + r_1 s_1 + r_2 s_2 + r_3 s_3 = k$.

Dividiremos el análisis en dos partes:

Primer caso: $r_1 s_1 + r_2 s_2 + r_3 s_3 \geq 1$.

Tomamos $f_0 = 0$. Supongamos, para fijar ideas, que

$r_2 s_2 \geq 1$ (las otras posibilidades pueden tratarse de la

misma forma). En tal caso, podemos expresar $f_\varepsilon = \frac{\partial^{r_2} \hat{u}}{\partial \beta^{r_2}} \tilde{f}_\varepsilon$

y $\|f_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \left\| \frac{\partial^{r_2} \hat{u}}{\partial \beta^{r_2}} \right\|_{L^{p_2}(\Omega_\varepsilon)} \|\tilde{f}_\varepsilon\|_{L^{p_1}(\Omega_\varepsilon)}$, donde $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{2}$

Por la hipótesis de inducción (observemos que todas

las derivadas de \hat{u} que aparecen en f_ϵ son de orden $\leq k-1$),

$D^j \hat{u}$ es acotada en $L^p(\Omega_\epsilon)$ para cada $p > 2$, y lo mismo sucede con w_ϵ . Esto implica que

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}_\epsilon\|_{L^{p_1}(\Omega_\epsilon)} &\leq M \|1 + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \alpha}\|_{L^{m_1 q_1}}^{m_1} \|w_\epsilon + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \beta}\|_{L^{m_2 q_2}}^{m_2} \left\| \frac{\partial^{r_1} \hat{u}}{\partial \alpha^{r_1}} \right\|_{L^{r_1 q_3}}^{r_1} \times \\ &\quad \times \left\| \frac{\partial^{r_2-1} \hat{u}}{\partial \beta^{r_2-1}} \right\|_{L^{(r_2-1)q_4}}^{(r_2-1)} \left\| \frac{\partial^{r_3} \hat{u}}{\partial \lambda^{r_3}} \right\|_{L^{r_3 q_5}}^{r_3} \end{aligned}$$

(donde $q_1^{-1} + q_2^{-1} + q_3^{-1} + q_4^{-1} + q_5^{-1} = p_1^{-1}$) es acotado

para cada $p_1 > 2$. Por consiguiente,

$$\|f_\epsilon\|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \leq \|\tilde{f}_\epsilon\|_{L^{p_1}(\Omega_\epsilon)} \left\| \frac{\partial^{r_2} \hat{u}}{\partial \beta^{r_2}} \right\|_{L^{p_2}(\Omega_\epsilon)} \leq$$

$$\|\tilde{f}_\epsilon\|_{L^{p_1}(\Omega_\epsilon)} M_{p_2} \epsilon^{(1/p_2) - (1/2)} \left\| \frac{\partial^{r_2} \hat{u}}{\partial \beta^{r_2}} \right\|_{H^1(\Omega_\epsilon)}$$

$$\text{y } \left\| \frac{\partial^{r_2} \hat{u}}{\partial \beta^{r_2}} \right\|_{H^1(\Omega_\epsilon)} \leq M_{p^*} \epsilon^{1/p^*} \quad \text{para cualquier } p^* > 2$$

dado (por la hipótesis de inducción).

Queremos elegir $p_2, p^* > 2$ tales que

$$(1/p_2) - (1/2) + (1/p^*) > 1/\bar{p}, \text{ o sea } p^* < \left(\frac{1}{\bar{p}} - \frac{1}{p_2} + \frac{1}{2} \right)^{-1}$$

si $(1/\bar{p}) - (1/p_2) + (1/2) > 0$.

Tomemos p_2 arbitrario, con la propiedad $2 < p_2 < \bar{p}$.

Entonces, la segunda desigualdad se satisface, y todo lo

que tenemos que hacer es seleccionar un p^* tal que

$$2 < p^* < ((1/\bar{p}) - (1/p_2) + (1/2))^{-1}.$$

En resumen, el proceso a seguir es: dado $\bar{p} > 2$ a

priori, elegimos $p_2 \in (2, \bar{p})$ y p^* como en la fórmula ante-

rior. Estos valores determinan las constantes M_{p^*} y p_1

tal que $p_1^{-1} + p_2^{-1} = 2^{-1}$. Una vez elegido p_1 , podemos

encontrar una cota superior para $\|\tilde{f}_\epsilon\|_{L^{p_1}(\Omega_\epsilon)}$; finalmente,

concluimos que existe una constante M'_p dependiente única-

mente de \bar{p} , tal que $\|f_\epsilon\|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \leq M'_p \epsilon^a$, donde

$$a = (1/p_2) - (1/2) + (1/p^*) > 1/\bar{p}.$$

Segundo caso: $r_1 s_1 + r_2 s_2 + r_3 s_3 = 0$. Entonces definimos

$$f_0 = M f_{\lambda \dots \lambda u \dots u}(\lambda, \alpha + \beta w_0) w_0^{m_2},$$

$$\begin{aligned}
f_\varepsilon &= M f_{\lambda \dots \lambda u \dots u}(\lambda, \alpha + \beta w_\varepsilon + \hat{u}) \left(1 + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \alpha}\right)^{m_1} \left(w_\varepsilon + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \beta}\right)^{m_2} \\
\|f_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)} &\leq M_1 \left\|1 + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \alpha}\right\|_{L^{p_1 m_1}(R_\varepsilon)}^{m_1} \left\|w_\varepsilon + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \beta}\right\|_{L^{p_2 m_2}(R_\varepsilon)}^{m_2} = \\
&= M_1 \left[O(\varepsilon^{1/p_1 m_1})\right]^{m_1} \left[O(\varepsilon^{1/p_2 m_2})\right]^{m_2} = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})
\end{aligned}$$

ya que $p_1^{-1} + p_2^{-1} = 1/2$.

$$\begin{aligned}
\|f_\varepsilon - f_0\|_{L^2(\Omega_0)} &\leq M_2 \|(f_{\lambda \dots \lambda u \dots u}(\lambda, \alpha + \beta w_\varepsilon + \hat{u}) - \\
&\quad - f_{\lambda \dots \lambda u \dots u}(\lambda, \alpha + \beta w_0)) w_0^{m_2}\|_{L^2(\Omega_0)} + \\
&\quad + M_2 \|f_{\lambda \dots \lambda u \dots u}(\lambda, \alpha + \beta w_\varepsilon + \hat{u}) \left[\left(1 + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \alpha}\right)^{m_1} \left(w_\varepsilon + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \beta}\right)^{m_2} - w_0^{m_2}\right]\|_{L^2(\Omega_0)} \leq \\
&\leq M_3 \|w_0^{m_2}\|_{L^\infty(\Omega_0)} \|\beta(w_\varepsilon - w_0) + \hat{u}\|_{L^2(\Omega_0)} + \\
&\quad + M_4 \left\|\left(1 + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \alpha}\right)^{m_1} \left(w_\varepsilon + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \beta}\right)^{m_2} - w_0^{m_2}\right\|_{L^2(\Omega_0)} + \left\|\left(1 + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \alpha}\right)^{m_1} - 1\right\|_{L^2(\Omega_0)} \|w_0^{m_2}\|_{L^2(\Omega_0)}.
\end{aligned}$$

Ya sabemos que $\|\beta(w_\varepsilon - w_0) + \hat{u}\|_{L^p(\Omega_0)} = O(\varepsilon^{1/p})$, $p > 2$

Los otros términos pueden acotarse de la siguiente forma:

$$\left\|\left(1 + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \alpha}\right)^{m_1} \left(w_\varepsilon + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \beta}\right)^{m_2} - w_0^{m_2}\right\|_{L^2(\Omega_0)} =$$

$$\left\| \left(1 + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \alpha}\right)^{m_1} \left(w_\varepsilon + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \beta} - w_0\right) \left[\sum_{j=1}^{m_2-1} \left(w_\varepsilon + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \beta}\right)^j w_0^{m_2-j} \right] \right\|_{L^2(\Omega_0)}$$

Observemos que $\left(1 + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \alpha}\right)^{m_1}$ y $\sum_{j=1}^{m_2-1} \left(w_\varepsilon + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \beta}\right)^j w_0^{m_2-j}$

permanecen acotados en L^p cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, para cualquier $p > 2$;

por tanto, la expresión completa está mayorada por

$$\left\| \left(1 + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \alpha}\right)^{m_1} \left[\sum_{j=1}^{m_2-1} \left(w_\varepsilon + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \beta}\right)^j w_0^{m_2-j} \right] \right\|_{L^{p_1}(\Omega_0)} \left\| \beta(w_\varepsilon - w_0) + \hat{u} \right\|_{L^{p_2}(\Omega_0)} =$$

$$= O(\varepsilon^{1/p_2}). \text{ Tomando } p_2 = \bar{p}, \text{ obtenemos el resultado deseado.}$$

El otro término puede mayorarse de forma similar.

Sumando todos los términos y aplicando la Proposi-

ción III.5.3, obtenemos finalmente $\|D^k \hat{u}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = O(\varepsilon^{1/\bar{p}})$,

lo que completa la demostración.

El caso $\varepsilon_0 > 0$ es mucho más sencillo; la prueba

consiste en sucesivas aplicaciones de la Proposición III.5.3

y del teorema de Sobolev.

QED

IV.3 Continuidad de G, H en ε .

Gracias a la Proposición IV.2.1, la demostración del Teorema IV.1.1 es muy simple. Todo lo que hay que observar es que las derivadas de orden k de

$$\left(\frac{G}{H}\right)(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon) = P_{\varepsilon} f(\lambda, \alpha + \beta w_{\varepsilon} + \hat{u}(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon))$$

tienen la forma general

$$D^k \left(\frac{G}{H}\right) = \sum P_{\varepsilon} \left[M f_{\lambda..u}(\lambda, \alpha + \beta w_{\varepsilon} + \hat{u}) \left(1 + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \alpha}\right)^{m_1} \left(w_{\varepsilon} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \beta}\right)^{m_2} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{\partial^r \hat{u}}{\partial \alpha^{r_1}}\right)^{s_1} \left(\frac{\partial^r \hat{u}}{\partial \beta^{r_2}}\right)^{s_2} \left(\frac{\partial^r \hat{u}}{\partial \lambda^{r_3}}\right)^{s_3} \right]$$

donde $m_1 + m_2 + r_1 s_1 + r_2 s_2 + r_3 s_3 \leq k$.

Como consecuencia de la Proposición IV.2.1, tenemos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|D^k \hat{u}\|_{L^p(\Omega_{\varepsilon})} = 0 \text{ para todo } p > 2 \text{ (basta fijar } p^* > 2,$$

$p^* < 2p/(p-2)$ y aplicar la Proposición III.2.3).

Todo esto implica

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D^k \left(\frac{G}{H}\right)(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon) = \sum_{s_1 + s_2 + s_3 = 0} P_0 \left[M f_{\lambda..u}(\lambda, \alpha + \beta w_0) w_0^{m_2} \right],$$

que coincide precisamente con $D^k \left(\frac{G}{H}\right)(\alpha, \beta, \lambda, 0)$.

Como este límite es uniforme en α, β, λ en conjuntos acotados, se tiene $\left(\frac{G}{H}\right)(\alpha', \beta', \lambda', \varepsilon) \rightarrow \left(\frac{G}{H}\right)(\alpha, \beta, \lambda, 0)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, $\alpha' \rightarrow \alpha$, $\beta' \rightarrow \beta$, $\lambda' \rightarrow \lambda$. Finalmente, cuando $\varepsilon_0 > 0$, la demostración es similar, por lo cual la omitimos.

Esto completa la demostración del Teorema IV.1.1.

CAPITULO V

EL CASO HIPERBOLICO

Este capítulo se divide en tres secciones. En la primera demostramos que toda solución del problema estacionario $S(\lambda, 0)$ es localmente constante en Ω_0 si se satisfacen las hipótesis del Teorema IV.1.1. En la segunda, suponemos que todos los ceros de la función $f(0, \cdot)$ son simples; esto implica que todas las soluciones de $S(0, 0)$ son hiperbólicas (en el sentido espectral), lo que, a su vez, nos permite aplicar el Teorema de la Función Implícita y concluir que cada una de dichas soluciones "genera" una familia continua de soluciones $u^*(\lambda, \epsilon)$ para λ, ϵ suficientemente pequeños. En la tercera sección probaremos que las propiedades de estabilidad (en el sentido de Liapunov) de las soluciones $u^*(\lambda, \epsilon)$ están determinadas por las de $u^*(0, 0)$:

V.1 Caracterización de las soluciones de $S(\lambda, 0)$

Lema V.1.1 $\hat{u}(\alpha, \beta, \lambda, 0) = 0$ para todo α, β, λ .

Demostración: Como $f(\lambda, \alpha + \beta w_0)$ es localmente constante en Ω_0 , el Lema III.5.4 implica que $(I - P_0)f(\lambda, \alpha + \beta w_0) = 0$. Por tanto, $\hat{u}(\alpha, \beta, \lambda, 0) = 0$ por unicidad.

QED

Proposición V.1.2 Con las hipótesis del Teorema IV.1.1, toda solución de $S(\lambda, 0)$ tiene la forma $u = k_L$ en Ω_0^L , $u = k_R$ en Ω_0^R , donde k_L, k_R son constantes tales que $f(\lambda, k_L) = f(\lambda, k_R) = 0$.

Demostración: Por el lema anterior, $u = \varphi + \psi w_0$; por tanto, u es localmente constante, y es obvio que las constantes correspondientes han de ser ceros de $f(\lambda, \cdot)$.

QED

Observación: Nuestras hipótesis sobre f implican que $\text{Lip } f(\lambda, \cdot) \leq k_1$, y $k_1 < \lambda^{(2)}(\Omega_0^R), \lambda^{(2)}(\Omega_0^L)$. Esto explica el hecho de que no haya soluciones no constantes en ninguno de los dominios disjuntos Ω_0^R, Ω_0^L .

V.2 El caso hiperbólico

Teorema V.2.1 Si todos los ceros de $f(0, \cdot)$ son simples, entonces, para cada solución u_0 de $S(0, 0)$ existe $\varepsilon_0(u_0) > 0$ y $\lambda_0(u_0) > 0$, y una familia de funciones $u^*(\lambda, \varepsilon)$ para $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0(u_0)$, $|\lambda| < \lambda_0(u_0)$, continua débilmente en H^1 y fuertemente en L^2 tal que $u^*(0, 0) = u_0$ y cada $u^*(\lambda, \varepsilon)$ es solución de $S(\lambda, \varepsilon)$.

Además, para cada $K > 0$ existen $\varepsilon(K)$ y $\lambda(K)$ tales que si $u \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ es una solución de $S(\lambda, \varepsilon)$ con $\|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq K$, entonces $u = u^*(\lambda, \varepsilon)$ para alguna de las familias de soluciones construídas.

Demostración: Sea u_0 una solución de $S(0,0)$. Por la Proposición V.1.2, $u_0 = K_L$ en Ω_0^L , $u_0 = K_R$ en Ω_0^R , con $f(0, K_L) = f(0, K_R) = 0$. Además, $k_L = f_u(0, K_L) \neq 0$, $k_R = f_u(0, K_R) \neq 0$ pues, por hipótesis, todos los ceros de $f(0, \cdot)$ son simples. Escribamos $u_0 = \alpha_0 + \beta_0 w_0$. Entonces, tenemos

$$G(\alpha_0, \beta_0, 0, 0) = H(\alpha_0, \beta_0, 0, 0) = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(G, H)}{\partial(\alpha, \beta)}(\alpha_0, \beta_0, 0, 0) &= \det \begin{pmatrix} k_L |\Omega_0^L| + k_R |\Omega_0^R| & k_L C_L |\Omega_0^L| + k_R C_R |\Omega_0^R| \\ -k_L C_L |\Omega_0^L| - k_R C_R |\Omega_0^R| & -k_L C_L^2 |\Omega_0^L| - k_R C_R^2 |\Omega_0^R| \end{pmatrix} \\ &= -k_L k_R |\Omega_0^L| |\Omega_0^R| (C_L - C_R)^2 \neq 0, \end{aligned}$$

donde C_L, C_R son las constantes que definen w_0 (ver Proposición III.4.4).

Como se dan las condiciones de regularidad suficientes, podemos aplicar el Teorema de la Función Implícita, y concluir la existencia de una solución única $(\alpha^*(\lambda, \varepsilon), \beta^*(\lambda, \varepsilon))$ de $G(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon) = H(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon) = 0$ tal que $\alpha^*(0, 0) = \alpha_0$, $\beta^*(0, 0) = \beta_0$; además, α^* y β^* , junto con sus derivadas primeras en λ , son continuas en un entorno de $(\lambda, \varepsilon) = (0, 0)$. Entonces,

$$u^*(\lambda, \varepsilon) = \alpha^*(\lambda, \varepsilon) + \beta^*(\lambda, \varepsilon) w_\varepsilon + \hat{u}(\alpha^*(\lambda, \varepsilon), \beta^*(\lambda, \varepsilon), \lambda, \varepsilon)$$

es una solución de $S(\lambda, \varepsilon)$ y es continua en λ, ε débilmente en H^1 y fuertemente en L^2 , y $u^*(0, 0) = u_0$.

Si u es una solución de $S(\lambda, \varepsilon)$ tal que

$$\|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq K, \text{ podemos escribir } u = \alpha + \beta w_\varepsilon + \hat{u}(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon), \text{ donde}$$

donde $G(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon) = H(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon) = 0$ y

$\alpha^2 |\Omega_0| + \beta^2 (1 + \lambda_\varepsilon) \leq K^2$. Por lo tanto, α y β varían en un conjunto compacto, y la propiedad de unicidad dada por el Teorema de la Función Implícita demuestra la última parte del teorema

QED

V.3 Estabilidad de las soluciones

El carácter hiperbólico de las soluciones de $S(0,0)$, consecuencia de la hipótesis de simplicidad de los ceros de $f(0, \cdot)$, nos permite, como veremos a continuación, analizar la estabilidad (Liapunov) de las ramas de soluciones $u^*(\lambda, \varepsilon)$ por medio de sus aproximaciones lineales. Para ello hemos de demostrar previamente que la porción del espectro del operador linealizado $\Delta_\varepsilon + f_u(\lambda, u^*(\lambda, \varepsilon))$ próxima al eje imaginario goza de cierta propiedad de continuidad:

Lema V.3.1 Sea u_0 una solución de $S(0,0)$, y $\varepsilon_0(u_0)$, $\lambda_0(u_0)$ como en el teorema previo. Supongamos que $\varepsilon_k \rightarrow \varepsilon_0 < \varepsilon_0(u_0)$, $\lambda_k \rightarrow \lambda_0 < \lambda_0(u_0)$, y sea μ_k un autovalor de $\Delta_{\varepsilon_k} + f_u(\lambda_k, u^*(\lambda_k, \varepsilon_k))$ tal que $|\mu_k| \leq k_1$ (la constante del Teorema IV.1.1), y $\mu_k \rightarrow \mu_0$. Entonces μ_0 es un autovalor de $\Delta_{\varepsilon_0} + f_u(\lambda_0, u^*(\lambda_0, \varepsilon_0))$.

Demostración: Sea v_{ε_k} una autofunción correspondiente a

$$\mu_k, \quad -\Delta_{\varepsilon_k} v_{\varepsilon_k} = [-\mu_k + f_u(\lambda_k, u^*(\lambda_k, \varepsilon_k))] v_{\varepsilon_k} \quad \text{y} \quad \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} v_{\varepsilon_k}^2 = 1.$$

Definamos $q_{\varepsilon_k} = -\mu_k + f_u(\lambda_k, u^*(\lambda_k, \varepsilon_k))$,

$$q_{\varepsilon_0} = -\mu_0 + f_u(\lambda_0, u^*(\lambda_0, \varepsilon_0))$$

Claramente, $\|q_{\varepsilon_k}\|_{L^\infty(\Omega_{\varepsilon_k})} \leq 2k_1 < C_1$.

Escribamos $v_{\varepsilon_k} = \alpha_k + \beta_k w_{\varepsilon_k} + \hat{v}_{\varepsilon_k}$. Como dedujimos

en el Capítulo II, tenemos ahora

$$\begin{cases} \hat{v}_{\varepsilon_k} = \hat{K}_{\varepsilon_k}^{(I-P_{\varepsilon_k})} [q_{\varepsilon_k}(\alpha_k + \beta_k w_{\varepsilon_k} + \hat{v}_{\varepsilon_k})] \\ P_{\varepsilon_k} q_{\varepsilon_k}(\alpha_k + \beta_k w_{\varepsilon_k} + \hat{v}_{\varepsilon_k}) = 0 \end{cases}$$

Como $\alpha_k^2 |\Omega_{\varepsilon_k}| + \beta_k^2 \leq 1$, podemos suponer que $\alpha_k \rightarrow \alpha_0$,

$\beta_k \rightarrow \beta_0$. Entonces, $q_{\varepsilon_k}(\alpha_k + \beta_k w_{\varepsilon_k}) \rightarrow q_{\varepsilon_0}(\alpha_0 + \beta_0 w_{\varepsilon_0})$ en L^2 .

Por la Proposición III.5.3, $\hat{v}_{\varepsilon_k} \rightarrow \hat{v}_0$ débilmente en H^1 y fuertemente en L^2 , donde \hat{v}_0 es la solución única de

$$\hat{v}_0 = \hat{K}_{\varepsilon_0}^{(I-P_{\varepsilon_0})} [q_{\varepsilon_0}(\alpha_0 + \beta_0 w_{\varepsilon_0} + \hat{v}_0)]$$

Por otra parte, $P_{\varepsilon_k} (q_{\varepsilon_k}(\alpha_k + \beta_k w_{\varepsilon_k} + \hat{v}_{\varepsilon_k})) = 0$ implica

$P_{\varepsilon_0} (q_{\varepsilon_0}(\alpha_0 + \beta_0 w_{\varepsilon_0} + \hat{v}_0)) = 0$. Por tanto, $v_0 \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_0 + \beta_0 w_{\varepsilon_0} + \hat{v}_0$

satisface $-\Delta_{\varepsilon_0} v_0 = [-\mu_0 + f_u(\lambda_0, u^*(\lambda_0, \varepsilon_0))] v_0$, y además

$\|v_0\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_0})} = 1$, pues la convergencia es fuerte en L^2 .

Por consiguiente, μ_0 es un autovalor de $-\Delta_{\varepsilon_0} + f_u(\lambda_0, u^*(\lambda_0, \varepsilon_0))$.

QED

Lema V.3.2 El mayor autovalor $\mu_{\lambda, \varepsilon}$ de $\Delta_{\varepsilon} + f_u(\lambda, u^*(\lambda, \varepsilon))$ satisface $\mu_{\lambda, \varepsilon} \leq k_1$ para $\varepsilon \leq \varepsilon_0(u_0)$, $|\lambda| \leq \lambda_0(u_0)$.

Demostración: Por la caracterización variacional de los autovalores y nuestra hipótesis sobre f_u , tenemos

$$-\mu_{\lambda, \varepsilon} = \inf \left\{ \int_{\Omega_{\varepsilon}} |\nabla v|^2 - \int_{\Omega_{\varepsilon}} f_u(\lambda, u^*(\lambda, \varepsilon)) v^2 : \int_{\Omega_{\varepsilon}} v^2 = 1, v \in H^1(\Omega_{\varepsilon}) \right\} \\ \geq -k_1.$$

QED

Teorema V.3.3 Bajo las hipótesis del Teorema V.2.1, las soluciones $u^*(\lambda, \varepsilon)$ tienen las mismas propiedades de estabilidad que $u^*(0, 0)$, para λ, ε suficientemente pequeños.

Demostración: Supongamos que $u^*(0, 0)$ es estable, pero existen sucesiones $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $\lambda_n \rightarrow 0$ tales que $u^*(\lambda_n, \varepsilon_n)$ es inestable.

Las hipótesis del Teorema V.2.1 implican que $u^*(0, 0)$ es hiperbólico, es decir, $\mu_{0,0} < 0$ en la notación del Lema V.3.2. Pero al mismo tiempo estamos suponiendo $\mu_{\lambda_n, \varepsilon_n} \geq 0$, y, además, tenemos $|\mu_{\lambda_n, \varepsilon_n}| \leq k_1$; y esto es una contradicción, por el Lema V.3.1.

Supongamos ahora que $u^*(0,0)$ es inestable. De nuevo, por hiperbolicidad, tenemos $\mu_{0,0} > 0$; hemos de demostrar que $\mu_{\lambda,\varepsilon} > 0$ para λ, ε suficientemente pequeños.

Existe $v_0 \in H^1(\Omega_0)$ tal que $\int_{\Omega_0} v_0^2 = 1$ y

$$J_{0,0}(v_0) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_0} \{ |\nabla v_0|^2 - f_u(0, u^*(0,0)) v_0^2 \} = -\mu_{0,0} < 0.$$

Sea $v = E_0 v_0$. Es fácil comprobar que

$$J_{\lambda,\varepsilon}(v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_\varepsilon} \{ |\nabla v|^2 - f_u(\lambda, u^*(\lambda, \varepsilon)) v^2 \}$$

converge hacia $J_{0,0}(v) = J_{0,0}(v_0)$, ya que (y esto es esencial) v es una función fija (independiente de ε). Además,

$$\int_{\Omega_\varepsilon} v^2 \rightarrow \int_{\Omega_0} v_0^2 = 1 \quad \text{por la misma razón. Esto implica que}$$

$$J_{\lambda,\varepsilon}(v) \leq -(1/2)\mu_{0,0} < 0 \quad \text{para } \lambda, \varepsilon \text{ suficientemente pequeños;}$$

y esto implica que $u^*(\lambda, \varepsilon)$ es inestable, por la caracterización variacional de los autovalores y el principio de estabilidad lineal (ver Capítulo I).

QED

CAPITULO VI

EL CASO CRITICO CON FUNCION SIMETRICA

VI.1 Introducción

En este capítulo consideraremos el caso no hiperbólico, o crítico, en el cual la función $f(0, \cdot)$ tiene un cero múltiple. Por simplicidad supondremos que f tiene la forma $f(\lambda, u) = \lambda u - g(u)$, donde g es una función diferenciable C^∞ tal que $g(0) = g'(0) = 0$. Puede comprobarse fácilmente que las Ecuaciones de Bifurcación son

$$(1.1) \begin{cases} G(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon) = |\Omega_\varepsilon| \lambda \alpha - \int_{\Omega_\varepsilon} g(\alpha + \beta w_\varepsilon + \hat{u}(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon)) = 0 \\ H(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon) = (\lambda - \lambda_\varepsilon) \beta - \int_{\Omega_\varepsilon} w_\varepsilon g(\alpha + \beta w_\varepsilon + \hat{u}(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon)) = 0 \end{cases}$$

El análisis de estas ecuaciones constará de los siguientes pasos:

- 1) Definimos $s = \lambda_\varepsilon$, y lo consideraremos como un parámetro independiente.
- 2) Si $g(u) = au^p + o(|u|^{p+1})$, $a \neq 0$, las ecuaciones (1.1) adoptan la forma

$$(1.2) \quad \lambda L_1(\varepsilon)X + sL_2(\varepsilon)X + T(X, \lambda, \varepsilon) + R(X, \lambda, \varepsilon) = 0$$

donde $X = (\alpha, \beta)$, $L_1(\varepsilon)$ y $L_2(\varepsilon)$ son matrices 2×2 continuas en ε , $T(\cdot, \lambda, \varepsilon)$ es un polinomio homogéneo de grado p continuo en λ, ε y $|R(X, \lambda, \varepsilon)| = o(|X|^{p+1})$ uniformemente en λ, ε .

- 3) Analizaremos (1.2) mediante el método de cambio de escala, y obtendremos un número finito de curvas de bifurcación $\lambda = \lambda_j(s, \varepsilon)$, $j = 1, \dots, q$.
- 4) Recordando que $s = \lambda_\varepsilon$, concluiremos que $\lambda = \lambda_j(\lambda_\varepsilon, \varepsilon) \equiv \tilde{\lambda}_j(\varepsilon)$ representan las curvas de bifurcación en el plano (λ, ε) .

VI.2 Formulación del problema con dos parámetros

Sea $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^∞ tal que

- (i) $g(0) = g'(0) = \dots = g^{(p-1)}(0) = 0$, $g^{(p)}(0) = p!a \neq 0$.
- (ii) $g', \dots, g^{(p+1)}$ son uniformemente acotadas en \mathbb{R} , y
- $$|g'(u)| \leq k_1/2.$$

Entonces, la función $f(\lambda, u) = \lambda u - g(u)$ satisface las hipótesis del Teorema IV.1.1, y el resto de las proposiciones del Capítulo IV, si $|\lambda| \leq k_1/2$.

Por hipótesis, $g(u) = au^p + r(u)$, $r(u) = o(|u|^{p+1})$.

Definamos: $h(u) = au^p$,

$$L_1(\varepsilon) = \begin{pmatrix} |\Omega_\varepsilon| & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_2(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$T(\alpha, \beta, \varepsilon) = T(X, \varepsilon) = \begin{pmatrix} -\int_{\Omega_\varepsilon} h(\alpha + \beta w_\varepsilon) \\ -\int_{\Omega_\varepsilon} w_\varepsilon h(\alpha + \beta w_\varepsilon) \end{pmatrix}$$

$$R(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon) = \begin{pmatrix} -\int_{\Omega_\varepsilon} [g(\alpha + \beta w_\varepsilon + \hat{u}(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon)) - h(\alpha + \beta w_\varepsilon)] \\ -\int_{\Omega_\varepsilon} w_\varepsilon [g(\alpha + \beta w_\varepsilon + \hat{u}(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon)) - h(\alpha + \beta w_\varepsilon)] \end{pmatrix}$$

Con esta notación, las Ecuaciones de Bifurcación toman la expresión

$$(1.2) \quad \lambda L_1(\varepsilon)X + sL_2(\varepsilon)X + T(X, \varepsilon) + R(X, \lambda, \varepsilon) = 0$$

donde $X = (\alpha, \beta)$, $s = \lambda_\varepsilon$.

Proposición VI.2.1 (i) $T(\cdot, \varepsilon)$ es un polinomio homogéneo de grado p continuo en X, ε .

(ii) $R(X, \lambda, \varepsilon) = O(|X|^{p+1})$ cuando $X \rightarrow 0$, uniformemente en $\lambda, \varepsilon, |\lambda| \leq k_1/2$, $0 \leq \varepsilon \leq \delta_0$.

Demostración: (i)

$$- \int_{\Omega_\varepsilon} h(\alpha + \beta w_\varepsilon) = - \sum_{j=1}^p \binom{p}{j} \int_{\Omega_\varepsilon} \alpha^{p-j} \beta^j w_\varepsilon^j \rightarrow - \sum_{j=1}^p \binom{p}{j} \int_{\Omega_0} \alpha^{p-j} \beta^j w_0^j,$$

cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, pues $\int_{\Omega_\varepsilon} w_\varepsilon^j \rightarrow \int_{\Omega_0} w_0^j$ para todo j , y

$\int_{R_\varepsilon} w_\varepsilon^j \rightarrow 0$ por los resultados del Capítulo III.

(ii) Como $f(\lambda, \alpha)$ es constante, $(I - P_\varepsilon)f(\lambda, \alpha) = 0$, y

$$\hat{u}(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon) = \hat{K}_\varepsilon(I - P_\varepsilon)f(\lambda, \alpha + \beta w_\varepsilon + \hat{u}(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon))$$

implica $\hat{u}(\alpha, 0, \lambda, \varepsilon) = 0$ por unicidad. Por lo tanto,

$D_\alpha \hat{u}(\alpha, 0, \lambda, \varepsilon) = 0$, $D_\lambda \hat{u}(\alpha, 0, \lambda, \varepsilon) = 0$. Por otra parte,

$$D_\beta \hat{u} = \hat{K}_\varepsilon(I - P_\varepsilon)f_u(\lambda, \alpha + \beta w_\varepsilon + \hat{u})(w_\varepsilon + D_\beta \hat{u})$$

(por diferenciación implícita; hemos omitido los argumentos

$(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon)$). Por la misma razón de antes, $(I - P_\varepsilon)f_u(\lambda, \alpha)w_\varepsilon = 0$,

y entonces $D_\beta \hat{u}(\alpha, 0, \lambda, \varepsilon) = 0$ por unicidad.

Todo esto implica $\|\hat{u}(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon)\|_{L^q(\Omega_\varepsilon)} = o(\alpha^2 + \beta^2)$ uniformemente en λ, ε , para todo $q > 2$, ya que $D^2\hat{u}$ es acotada en $L^q(\Omega_\varepsilon)$ independientemente de $\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon$ para λ, α, β en conjuntos acotados.

Ahora, tenemos

$$R(X, \lambda, \varepsilon) = \begin{pmatrix} - \int_{\Omega_\varepsilon} r(\alpha + \beta w_\varepsilon + \hat{u}) \\ - \int_{\Omega_\varepsilon} w_\varepsilon r(\alpha + \beta w_\varepsilon + \hat{u}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_{\Omega_\varepsilon} [h(\alpha + \beta w_\varepsilon) - h(\alpha + \beta w_\varepsilon + \hat{u})] \\ \int_{\Omega_\varepsilon} w_\varepsilon [h(\alpha + \beta w_\varepsilon) - h(\alpha + \beta w_\varepsilon + \hat{u})] \end{pmatrix}$$

El primer término es claramente $O(|X|^{p+1})$, pues las p primeras derivadas de $r(\cdot)$ se anulan en 0. El segundo término puede expresarse como

$$\begin{pmatrix} \int_{\Omega_\varepsilon} h'(\alpha + \beta w_\varepsilon + \theta \hat{u}) \hat{u} \\ \int_{\Omega_\varepsilon} w_\varepsilon h'(\alpha + \beta w_\varepsilon + \theta \hat{u}) u \end{pmatrix}$$

donde θ es una función tal que $0 \leq \theta \leq 1$. Y como

$\|\hat{u}\|_{L^q(\Omega_\varepsilon)} = O(X^2)$, y $h'(u) = \alpha p u^{p-1}$, tenemos

$\|h'(\alpha + \beta w_\varepsilon + \theta \hat{u})\|_{L^q(\Omega_\varepsilon)} = O(|X|^{p-1})$, lo que implica que el segundo término es $O(|X|^{p+1})$.

QED

VI.3 Acotaciones a priori y cambio de escala

Podemos proceder ahora a analizar el problema de bifurcación con dos parámetros (1.2) siguiendo el método de cambio de escala desarrollado por Chow, Hale y Mallet-Paret [8].

Lema VI.3.1 Sea

$$(3.1) \quad F(X, \lambda, s, \varepsilon) \equiv \lambda L_1(\varepsilon)X + sL_2(\varepsilon)X + T(X, \varepsilon) + R(X, \lambda, \varepsilon) = 0$$

donde L_1, L_2 son matrices continuas 2×2 , $T(\cdot, \varepsilon)$ es un polinomio homogéneo de grado p continuo en X, ε y $|R(X, \lambda, \varepsilon)| = O(|X|^{p+1})$ uniformemente en λ, ε . Entonces, si se verifica la siguiente hipótesis

(i) $T(X, 0) \equiv 0$ implica $X = 0$,

existe un entorno U de $X=0$, y existen $p > 0, K > 0$, tales que toda solución $(X, \lambda, s, \varepsilon)$ de (3.1) con $X \in U, |\lambda|, |s|, \varepsilon < p$ satisface

$$|X| \leq K \left[|\lambda|^{1/(p-1)} + |s|^{1/(p-1)} \right].$$

Demostración: Supongamos que la conclusión es falsa: existen sucesiones $X_j \rightarrow 0, X_j \neq 0, \lambda_j \rightarrow 0, s_j \rightarrow 0, \varepsilon_j \rightarrow 0$ tales que

$$F(X_j, \lambda_j, s_j, \varepsilon_j) = 0 \quad \text{y} \quad |\lambda_j| + |s_j| / |X_j|^{(p-1)} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } j \rightarrow \infty.$$

Podemos suponer que $X_j / |X_j| \rightarrow X^*, |X^*| = 1$.

Dividamos (3.1) por $|X_j|^p$, y observemos que

$$\left| \frac{\lambda_j L_1(\varepsilon_j) X_j}{|X_j|^p} \right| \leq \frac{|\lambda_j| \|L_1(\varepsilon_j)\|}{|X_j|^{p-1}} \rightarrow 0,$$

$$\left| \frac{s_j L_2(\varepsilon_j) X_j}{|X_j|^p} \right| \leq \frac{|s_j| \|L_2(\varepsilon_j)\|}{|X_j|^{p-1}} \rightarrow 0$$

$$|X_j|^{-p} T(X_j, \varepsilon_j) = T(|X_j|^{-1} X_j, \varepsilon_j) \rightarrow T(X^*, 0),$$

$$|X_j|^{-p} R(X_j, \lambda_j, \varepsilon_j) \rightarrow 0.$$

Vemos así que $T(X^*, 0) = 0$, pero $X^* \neq 0$, lo que contradice la hipótesis (i).

QED

Nuestro objetivo es estudiar las soluciones "pequeñas" de (3.1), es decir, las soluciones X en el entorno de 0 dado por el lema recién establecido, para valores pequeños de λ, s, ϵ . En particular, nos interesa encontrar los valores de bifurcación (λ, s, ϵ) en cuyo entorno el número de soluciones de $F(X, \lambda, s, \epsilon) = 0$ cambia. Esos valores se encontrarán entre las ternas (λ, s, ϵ) tales que existe al menos una solución X de

$$(3.2) \quad \begin{cases} F(X, \lambda, s, \epsilon) = 0 \\ \det D_X F(X, \lambda, s, \epsilon) = 0 \end{cases}$$

En primer lugar queremos expresar $\lambda = rs$ para eliminar s de las ecuaciones. Para ello, hemos de asegurarnos primero que tal cambio de escala no trae consigo pérdida de información, es decir, que no existen bifurcaciones para valores de r arbitrariamente grandes; lo cual se demuestra en el siguiente lema.

Lema VI.3.2 Si se verifica la siguiente hipótesis

- (ii) $L_1(0)X + T(X, 0) = 0$ implica $\det(L_1(0) + D_X T(X, 0)) \neq 0$
y, si p es impar,
 $-L_1(0)X + T(X, 0) = 0$ implica $\det(-L_1(0) + D_X T(X, 0)) \neq 0$,

entonces existen $\delta > 0$, $\mu > 0$ tales que todos los valores de bifurcación (λ, s, ϵ) de (3.1) con $|\lambda|, \epsilon < \mu$ satisfacen $|s| \geq \delta |\lambda|$.

Demostración: Supongamos lo contrario: existe una sucesión de valores de bifurcación $(\lambda_j, s_j, \epsilon_j)$ tales que $\lambda_j \rightarrow 0$, $\epsilon_j \rightarrow 0$, $s_j/\lambda_j \rightarrow 0$, y $|\lambda_j|, |s_j|, \epsilon_j \leq \rho$ (la constante del Lema VI.3.1). Esto quiere decir que existen X_j tales que $F(X_j, \lambda_j, s_j, \epsilon_j) = 0$, $\det D_X F(X_j, \lambda_j, s_j, \epsilon_j) = 0$.

Definamos nuevas variables X^* , s^* por el "cambio de escala"

$$X = |\lambda|^{1/(p-1)} X^*, \quad s = \lambda s^*.$$

Entonces, las anteriores ecuaciones toman la forma

$$\begin{aligned} \lambda_j |\lambda_j|^{1/(p-1)} L_1(\epsilon_j) X_j^* + s_j^* \lambda_j |\lambda_j|^{1/(p-1)} L_2(\epsilon_j) X_j^* + \\ + |\lambda_j|^{1/(p-1)} T(X_j^*, \epsilon_j) + R(X_j, \lambda_j, \epsilon_j) = 0 \end{aligned}$$

$$\det [\lambda_j L_1(\epsilon_j) + s_j^* \lambda_j L_2(\epsilon_j) + |\lambda_j| D_X T(X_j^*, \epsilon_j) + D_X R(X_j, \lambda_j, \epsilon_j)] = 0.$$

ya que $T(\cdot, \epsilon)$ y $D_X T(\cdot, \epsilon)$ son homogéneos de grados p y $p-1$, respectivamente.

Dividamos la primera ecuación por $|\lambda_j|^{p/(p-1)}$ y la segunda por $|\lambda_j|$ y observemos que

$$|\lambda_j|^{-p/(p-1)} R(|\lambda_j|^{1/(p-1)} X_j^*, \lambda_j, \epsilon_j) = |\lambda_j|^{1/(p-1)} o(|X_j^*|^{p+1}),$$

$$|\lambda_j|^{-1} D_X R(|\lambda_j|^{1/(p-1)} X_j^*, \lambda_j, \epsilon_j) = |\lambda_j|^{1/(p-1)} o(|X_j^*|^p).$$

El Lema VI.3.1 implica que X_j^* es acotado, por lo cual podemos suponer que $X_j^* \rightarrow X_0^*$, para algún X_0^* . Si ahora hacemos tender j a ∞ , y aplicamos nuestra hipótesis $s_j^* \rightarrow 0$, obtenemos

$$\begin{cases} \pm L_1(0)X_0^* + T(X_0^*, 0) = 0 \\ \det(L_1(0) + D_X T(X_0^*, 0)) = 0 \end{cases}$$

lo que contradice (ii).

QED

Gracias a este lema, el cambio de variables $\lambda = rs$ está justificado. Podemos ahora proceder a expresar X en función de s : definimos

$$(3.4) \quad X = s^{1/(p-1)} Y; \quad \lambda = rs$$

(En general, deberíamos tomar $|s|$, pero en este caso nos interesa únicamente la región $s \geq 0$, ya que s "representa" λ_ϵ .) Sustituyendo en (3.1) y dividiendo por $s^{p/(p-1)}$, definimos

$$(3.5) \quad \tilde{F}(Y, r, s, \epsilon) \equiv rL_1(\epsilon)Y + L_2(\epsilon)Y + T(Y, \epsilon) + s^{-p/(p-1)} R(s^{1/(p-1)} Y, rs, \epsilon) = 0$$

De la misma forma que en la demostración del Lema VI.3.2, puede comprobarse que si $(\lambda_j, \epsilon_j, s_j)$ son valores de bifurcación de (3.1) con $s_j \rightarrow 0$, $\epsilon_j \rightarrow 0$, y r es un punto

de acumulación de $\{\lambda_j/s_j\}$ (que es acotado, por el susodicho lema), entonces existe una solución Y de

$$(3.6) \quad \begin{cases} rL_1(0)Y + L_2(0)Y + T(Y,0) = 0 \\ \det(rL_1(0) + L_2(0) + D_X T(Y,0)) = 0 \end{cases}$$

Nuestro próximo objetivo es, por tanto, estudiar las ecuaciones (3.5), (3.6) en nuestro problema.

VI. 4 Las curvas de bifurcación bajo hipótesis de simetría

En lo que sigue supondremos que se satisface la siguiente hipótesis de simetría:

Hipótesis (S): Los dominios Ω_ϵ son simétricos con respecto al eje Oy .

Además, con objeto de simplificar al máximo las fórmulas, supondremos que $|\Omega_0| = 1$ (lo cual no supone pérdida de generalidad al corresponder a un simple cambio de variables); también supondremos $a > 0$ si p es impar. Con estas simplificaciones, $T(\cdot, 0)$ toma la forma

$$(3.7) \quad T(X, 0) = T(\alpha, \beta, 0) = \begin{pmatrix} \int_{\Omega_0} h(\alpha + \beta w_0) \\ \int_{\Omega_0} w_0 h(\alpha + \beta w_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(h(\alpha + \beta) + h(\alpha - \beta)) \\ \frac{1}{2}(h(\alpha + \beta) - h(\alpha - \beta)) \end{pmatrix}$$

La justificación del cambio de escala recién discutido es el objeto del siguiente lema, que muestra que las condiciones (i) del Lema VI.3.1 y (ii) del Lema VI.3.2 se verifican para nuestras ecuaciones de bifurcación.

Lema VI.4.1 La función $T(\cdot, 0)$ definida en (3.7) satisface

(i) $T(X, 0) = 0$ implica $X = 0$.

(ii) $L_1(0)X + T(X, 0) = 0$ implica $\det(L_1(0) + D_X T(X, 0)) \neq 0$,

y, si p es impar,

$-L_1(0)X + T(X, 0) = 0$ implica $\det(-L_1(0) + D_X T(X, 0)) \neq 0$.

Demostración: (i) $T(\alpha, \beta, 0) = 0$ implica $h(\alpha + \beta) = h(\alpha - \beta) = 0$; por tanto, $\alpha = \beta = 0$.

(ii) Sea $X = (\alpha, \beta)$ tal que

$$\alpha - \frac{1}{2}(h(\alpha + \beta) + h(\alpha - \beta)) = 0, \quad \beta - \frac{1}{2}(h(\alpha + \beta) - h(\alpha - \beta)) = 0,$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}(h'(\alpha + \beta) + h'(\alpha - \beta)) & -\frac{1}{2}(h'(\alpha + \beta) - h'(\alpha - \beta)) \\ -\frac{1}{2}(h'(\alpha + \beta) - h'(\alpha - \beta)) & 1 - \frac{1}{2}(h'(\alpha + \beta) + h'(\alpha - \beta)) \end{pmatrix} =$$

$$= (1 - h'(\alpha + \beta))(1 - h'(\alpha - \beta)) = 0.$$

Sumando y restando las dos primeras ecuaciones, obtenemos $\alpha + \beta = h(\alpha + \beta)$; $\alpha - \beta = h(\alpha - \beta)$. Por lo tanto, $\alpha + \beta$ y $\alpha - \beta$ son raíces de $h(u) = u$. Ahora bien, si $u = 0$, se tiene $h'(0) = 0$, y si $u \neq 0$, entonces $au^{p-1} = 1$, y $h'(u) = apu^{p-1} = p \neq 1$. En cualquier caso, el determinante nunca se anula.

Si p es impar, entonces $-L_1(0)X + T(X, 0) = 0$ tiene únicamente solución trivial $X = 0$ (esto es consecuencia de que el problema $-\Delta u = \lambda u - au^p$, $a > 0$, p impar, $\lambda < 0$ es estrictamente monótono). Entonces,

$$\det(-L_1(0) + D_X T(0, 0)) = 1 \neq 0.$$

QED

Una vez justificados los cambios de variables efectuados, comenzamos el análisis de las ecuaciones (3.6), que, en nuestro caso, tienen la forma

$$(4.1) \quad \begin{cases} rY_1 - \frac{1}{2}(h(Y_1+Y_2) + h(Y_1-Y_2)) = 0 \\ (r-1)Y_2 - \frac{1}{2}(h(Y_1+Y_2) - h(Y_1-Y_2)) = 0 \\ r(r-1) - \frac{2r-1}{2}(h'(Y_1+Y_2) + h'(Y_1-Y_2)) + h'(Y_1+Y_2)h'(Y_1-Y_2) = 0 \end{cases}$$

pues $L_1(0) = I$, $L_2(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, y

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{bmatrix} r - \frac{1}{2}(h'(Y_1+Y_2) + h'(Y_1-Y_2)) & -\frac{1}{2}(h'(Y_1+Y_2) - h'(Y_1-Y_2)) \\ -\frac{1}{2}(h'(Y_1+Y_2) - h'(Y_1-Y_2)) & r - 1 - \frac{1}{2}(h'(Y_1+Y_2) + h'(Y_1-Y_2)) \end{bmatrix} =$$

$$= r(r-1) - \frac{2r-1}{2}(h'(Y_1+Y_2) + h'(Y_1-Y_2)) + h'(Y_1+Y_2)h'(Y_1-Y_2).$$

El cálculo de las soluciones de (4.1) se simplifica grandemente gracias al siguiente resultado, causado básicamente por las simetrías presentes en nuestro problema.

Proposición VI.4.2 Toda solución (Y_1, Y_2, r) de (4.1) satisface $Y_1 Y_2 = 0$.

Demostración: Definamos $Z_1 = Y_1 + Y_2$ $Y_1 = \frac{1}{2}(Z_1 + Z_2)$
 $Z_2 = Y_1 - Y_2$ $Y_2 = \frac{1}{2}(Z_1 - Z_2)$

Si (Y_1, Y_2, r) es una solución de (4.1), entonces, multiplicando la primera fila de Δ por Y_1 , la segunda por Y_2 y utilizando las dos primeras ecuaciones, obtenemos

$$\begin{aligned}
4Y_1Y_2\Delta &= h(z_1)^2 - h(z_2)^2 - \frac{1}{2}((z_1 - z_2)(h(z_1) + h(z_2)) + \\
&\quad + (z_1 + z_2)(h(z_1) - h(z_2)))(h'(z_1) + h'(z_2)) + \\
&\quad + (z_1 + z_2)(z_1 - z_2)h'(z_1)h'(z_2) = \\
&= a^2z_1^{2p} - a^2z_2^{2p} - pa^2(z_1^{p+1} - z_2^{p+1})(z_1^{p-1} + z_2^{p-1}) + \\
&\quad + a^2p^2(z_1^2 - z_2^2)z_1^{p-1}z_2^{p-1}.
\end{aligned}$$

Por tanto, $\frac{4Y_1Y_2\Delta}{a^2(1-p)} = z_1^{2p} - z_2^{2p} - p(z_1^2 - z_2^2)z_1^{p-1}z_2^{p-1}.$

Si suponemos $Y_1Y_2 \neq 0$, entonces $\Delta=0$ si y sólo si

$$(4.2) \quad z_1^{2p} - z_2^{2p} - p(z_1^2 - z_2^2)z_1^{p-1}z_2^{p-1} = 0.$$

Si $z_2=0$, (4.2) implica $z_1=0$, y entonces $Y=0$, contra nuestra hipótesis. Por tanto, podemos escribir $z_1 = Az_2$. Sustituyendo en (4.2) y dividiendo por z_2^{2p} , tenemos

$$(4.3) \quad F(A) \stackrel{\text{def}}{=} A^{2p} - pA^{p+1} + pA^{p-1} - 1 = 0.$$

Nuestro objetivo es demostrar que las únicas raíces de $F(A)$ son $A=1$, $A=-1$, ya que $A=1$ implica $Y_2=0$, y $A=-1$ implica $Y_1=0$.

$$F'(A) = 2pA^{p-1} - p(p+1)A^p + p(p-1)A^{p-2} = pA^{p-2}(2A^{p+1} - (p+1)A^2 + p-1).$$

Llamemos $G(A) = 2A^{p+1} - (p+1)A^2 + p - 1$. Entonces

$$G'(A) = 2(p+1)A^{p-1} - 2A, \text{ es decir, } G'(A) > 0 \text{ si } A > 1,$$

$$G'(A) < 0 \text{ si } 0 < A < 1.$$

Como $G(1) = 0$, tenemos $G(A) > 0$ para $A > 0$, $A \neq 1$; esto implica que $F'(A) > 0$ si $A > 0$, $A \neq 1$, luego F es estrictamente creciente en $(0, \infty)$, y así la ecuación $F(A) = 0$ tiene exactamente una raíz en $(0, \infty)$, que es $A = 1$.

Si p es impar, F es par y no hay nada más que demostrar.

Si p es par, $G'(A)$ es positiva para $A < 0$, y entonces existe un único valor A_0 tal que $G(A) < 0$ si $A < A_0$, y $G(A) > 0$ si $A > A_0$, pues $G(0) = p-1 > 0$, mientras que $G(-1) = -4 < 0$.

Como $F'(A)$ tiene el mismo signo que $G(A)$, $F(A)$ tiene un único mínimo en A_0 y $F(-\infty) = +\infty$, $F(0) = -1$ implican que F puede tener únicamente una raíz negativa, que es precisamente $A = -1$. Esto completa la demostración.

QED

A continuación vamos a calcular las soluciones de (4.1):

$$1) \quad Y_1 \neq 0, Y_2 = 0.$$

En este caso, la segunda ecuación de (4.1) se satisface automáticamente para todo Y_1 , r y nos queda

$$\begin{cases} rY_1 - h(Y_1) = 0 \\ \Delta = r(r-1) - (2r-1)h'(Y_1) + h''(Y_1)Y_1^2 = (h'(Y_1) - r)(h'(Y_1) - r + 1) = 0. \end{cases}$$

Como $Y_1 \neq 0$, tenemos $r = aY_1^{p-1}$; vemos que $h'(Y_1) = r$ no puede verificarse, por lo cual debemos tener:

$$r-1 = h'(Y_1) = apY_1^{p-1} = pr, \text{ es decir } r = -1/(p-1).$$

Si p es impar, esto es imposible, ya que $a > 0$, implica $r = aY_1^{p-1} > 0$.

Si p es par, el valor de r obtenido es admisible, y el valor correspondiente de Y_1 es $Y_1 = -(1/a(p-1))^{1/(p-1)}$.

2) $Y_1 = 0, Y_2 \neq 0$.

Si p es par, la primera ecuación se reduce a $h(Y_2) = 0$, cuya única solución es $Y_2 = 0$.

Si p es impar, la primera ecuación se satisface automáticamente para todo r, Y_2 , y nos queda

$$\begin{cases} (r-1)Y_2 - h(Y_1) = 0 \\ \Delta \cdot r(r-1) - (2r-1)h'(Y_2) + h'(Y_2)^2 = 0 \end{cases}$$

Como vimos antes, aparte de la solución $Y_1 = Y_2 = 0$, las soluciones de la primera ecuación verifican $r-1 = aY_2^{p-1}$, por lo cual $r \geq 1$.

Nuevamente, $\Delta = (h'(Y_2) - r)(h'(Y_2) - r + 1)$. Como $r-1 = aY_2^{p-1}$, es imposible que $h'(Y_2) - r + 1 = 0$. Por tanto, las soluciones han de ser

$$r = p/(p-1); \quad Y_2 = \pm (1/a(p-1))^{1/(p-1)}.$$

3) $Y_1 = Y_2 = 0$.

La primera y segunda ecuación se satisfacen para todo r , y la tercera para $r = 0, r = 1$.

Resumamos estos resultados para futura referencia:

Lema VI.4.3 Las soluciones de (4.1) son las siguientes:

<u>p par</u>			<u>p impar</u>		
r	Y_1	Y_2	r	Y_1	Y_2
0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0
$\frac{-1}{p-1}$	$-C_p$	0	$\frac{p}{p-1}$	$\pm C_p$	0

donde $C_p = (1/a(p-1))^{1/(p-1)}$.

Estas soluciones representan los únicos valores posibles de (Y_1, Y_2, r) para los cuales puede haber bifurcación de soluciones en nuestro problema original (1.1) que, tras los cambios de variables, tiene la forma

$$(4.4) \begin{cases} F_1 \equiv r |Q_\xi| Y_1 - \int_{Q_\xi} h(Y_1 + Y_2 w_\xi) + s^{-p/(p-1)} R_1(s)^{1/(p-1)} Y_{,rs,\xi} = 0 \\ F_2 \equiv (r-1) Y_2 - \int_{Q_\xi} w_\xi h(Y_1 + Y_2 w_\xi) + s^{-p/(p-1)} R_2(s)^{1/(p-1)} Y_{,rs,\xi} = 0 \end{cases}$$

Los valores $r^0 = 0$ y $r^0 = 1$ darán lugar a bifurcaciones primarias de la solución trivial, mientras que $r^0 = p/(p-1)$ (si p es impar) y $r^0 = -1/(p-1)$ (si p es par) representan posibles bifurcaciones secundarias.

En este lugar, se hace esencial distinguir los dos casos $p = \text{par}$, $p = \text{impar}$. Resumimos a continuación los resultados que obtendremos:

1) Si $g(\cdot)$ es impar (y, por tanto, p es impar), las dos bifurcaciones primarias son supercríticas (siendo r el parámetro), y para $r^0 = p/(p-1)$ hay dos bifurcaciones secundarias simultáneas, ambas supercríticas, a ambos lados de la rama que sale de cero en $r^0 = 1$.

2) Si $g(\cdot)$ es par (y entonces p es par), la bifurcación primaria en $r^0 = 0$ es transcítica, y la que tiene lugar en $r^0 = 1$ es supercrítica. En $r^0 = -1/(p-1)$ hay una bifurcación secundaria subcrítica de la rama que parte de cero en $r^0 = 0$.

La bifurcación para $r^0 = 0$ no presenta diferencias entre ambos casos: corresponde simplemente a la rama de soluciones constantes de la ecuación en derivadas parciales que estamos estudiando; tal rama es supercrítica o transcítica según la paridad de $g(\cdot)$.

Aparte de ser ambas supercríticas, hay mucha diferencia entre los casos (1) y (2) en lo que se refiere a la bifurcación para $r^0 = 1$. De hecho, el caso p par presenta degeneración de cierto orden: la rama obtenida es de orden $(r-1)^{1/2p-1}$, sin embargo, cuando p es impar, dicha rama es de orden $(r-1)^{1/(p-1)}$, como cabría esperar genéricamente.

Debido a estas diferencias, trataremos los casos (1) y (2) separadamente. Pero previamente hemos de derivar ciertas propiedades de las ecuaciones (4.4) que se deducen de la hipótesis de simetría (S).

Proposición VI.4.4 Supongamos que se verifica la Hipótesis (S). Definamos $S: L^2(\Omega_\varepsilon) \rightarrow L^2(\Omega_\varepsilon)$ como $(Sg)(x,y) = g(-x,y)$ para cada $g \in L^2(\Omega_\varepsilon)$. Entonces, para todo ε suficientemente pequeño, se verifican las siguientes propiedades:

- (i) $Sw_\varepsilon = -w_\varepsilon$, es decir, w_ε es impar en x .
- (ii) $S\hat{K}_\varepsilon(I-P_\varepsilon)g_\varepsilon = \hat{K}_\varepsilon(I-P_\varepsilon)Sg_\varepsilon$ para toda $g_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)$.
- (iii) $S\hat{u}(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon) = \hat{u}(\alpha, -\beta, \lambda, \varepsilon)$
- (iv) $G(\alpha, -\beta, \lambda, \varepsilon) = G(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon)$; $H(\alpha, -\beta, \lambda, \varepsilon) = -H(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon)$
- (v) $F_1(Y_1, -Y_2, r, s, \varepsilon) = F_1(Y_1, Y_2, r, s, \varepsilon)$
 $F_2(Y_1, -Y_2, r, s, \varepsilon) = -F_2(Y_1, Y_2, r, s, \varepsilon)$
- (vi) Si además $f(\lambda, -u) = -f(\lambda, u)$ para todo $\lambda, u \in \mathbb{R}$, entonces
 $\hat{u}(-\alpha, -\beta, \lambda, \varepsilon) = -\hat{u}(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon)$
 $G(-\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon) = -G(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon)$
 $H(-\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon) = H(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon)$
 $F_1(-Y_1, Y_2, r, s, \varepsilon) = -F_1(Y_1, Y_2, r, s, \varepsilon)$
 $F_2(-Y_1, Y_2, r, s, \varepsilon) = F_2(Y_1, Y_2, r, s, \varepsilon)$

donde G, H son las funciones de bifurcación de (1.1) y F_1, F_2 son las funciones obtenidas tras los cambios de variables, dadas por (4.4)

Demostración: (i): Por simetría, al ser λ_ε un autovalor simple, w_ε ha de ser par o impar en x . Pero sabemos que

$$\int_{\Omega_0} R w_\varepsilon \quad \text{y} \quad \int_{\Omega_0} L w_\varepsilon \quad \text{son distintos de cero y tienen signos}$$

opuestos. Por tanto, w_ϵ ha de ser impar en x .

(ii): Sean $h_\epsilon \in \hat{L}_\epsilon$, $\hat{u}_\epsilon \in \hat{H}_\epsilon$ tales que $-\Delta \hat{u}_\epsilon = h_\epsilon$; entonces $S\hat{u}_\epsilon \in \hat{H}_\epsilon$ satisface $-\Delta(S\hat{u}_\epsilon) = Sh_\epsilon$, y, además, si $\frac{\partial \hat{u}_\epsilon}{\partial n} = 0$ en $\partial\Omega_\epsilon$, entonces $\frac{\partial(S\hat{u}_\epsilon)}{\partial n} = 0$ en $\partial\Omega_\epsilon$, como es fácil comprobar. Vemos así que se tiene $S(\hat{K}_\epsilon h_\epsilon) = \hat{K}_\epsilon(Sh_\epsilon)$ por unicidad. Para terminar la demostración de (ii) todo lo que hace falta es ver que S conmuta con P_ϵ ; y esto es consecuencia directa de (i) y del hecho de que $\int_{\Omega_\epsilon} Sh = \int_{\Omega_\epsilon} h$ para toda función $h \in L^2(\Omega_\epsilon)$.

(iii): Llamemos $\hat{u}_\epsilon = \hat{u}(\alpha, \beta, \lambda, \epsilon)$. Entonces, $\hat{u}_\epsilon = \hat{K}_\epsilon(I-P_\epsilon)f(\lambda, \alpha + \beta w_\epsilon + \hat{u}_\epsilon)$ implica $S\hat{u}_\epsilon = S\hat{K}_\epsilon(I-P_\epsilon)f(\lambda, \alpha + \beta w_\epsilon + \hat{u}_\epsilon) = \hat{K}_\epsilon(I-P_\epsilon)Sf(\lambda, \alpha + \beta w_\epsilon + \hat{u}_\epsilon) = \hat{K}_\epsilon(I-P_\epsilon)f(\lambda, S(\alpha + \beta w_\epsilon + \hat{u}_\epsilon)) = \hat{K}_\epsilon(I-P_\epsilon)f(\lambda, \alpha - \beta w_\epsilon + S\hat{u}_\epsilon)$. Por unicidad, se ha de verificar $S\hat{u}_\epsilon = \hat{u}(\alpha, -\beta, \lambda, \epsilon)$.

(iv), (v) son consecuencias inmediatas de (iii).

(vi):

$$-\hat{u}_\epsilon = -\hat{K}_\epsilon(I-P_\epsilon)f(\lambda, \alpha + \beta w_\epsilon + \hat{u}_\epsilon) = \hat{K}_\epsilon(I-P_\epsilon)f(\lambda, -\alpha - \beta w_\epsilon - \hat{u}_\epsilon).$$

Por unicidad, $-\hat{u}_\epsilon = \hat{u}(-\alpha, -\beta, \lambda, \epsilon)$. Las demás identidades se siguen inmediatamente de ésta.

QED

VI.4.1 El caso $g(-u) = -g(u)$

Procedemos ahora a analizar los distintos puntos obtenidos en la Proposición VI.4.3

VI.4.1.1 $r^0 = p/(p-1)$

Los valores correspondientes de Y son

$$Y_1^0 = 0, \quad Y_2^0 = \pm (1/a(p-1))^{1/(p-1)}.$$

Consideremos en primer lugar el valor positivo de Y_1^0 . Tenemos

$$\begin{cases} F_2(Y_1^0, Y_2^0, r^0, 0, 0) = 0 \\ D_{Y_2} F_2(Y_1^0, Y_2^0, r^0, 0, 0) = r^0 - 1 - h'(Y_2^0) \neq 0. \end{cases}$$

Por el Teorema de la Función Implícita, $F_2 = 0$ tiene una única solución $Y_2 = Y_2(Y_1, r, s, \varepsilon)$ tal que $Y_2(0, r^0, 0, 0) = Y_2^0$ ($|Y_1|, |r-r^0|, s, \varepsilon$ suficientemente pequeños). Por sustitución en F_1 , definimos

$$\tilde{F}_1(Y_1, r, s, \varepsilon) \equiv F_1(Y_1, Y_2(Y_1, r, s, \varepsilon), r, s, \varepsilon).$$

Por la Proposición VI.4.4, la hipótesis de que g es impar implica $F_2(-Y_1, Y_2, r, s, \varepsilon) = F_2(Y_1, Y_2, r, s, \varepsilon)$. Por unicidad, se verifica $Y_2(-Y_1, r, s, \varepsilon) = Y_2(Y_1, r, s, \varepsilon)$. Y, por otra parte, tenemos $F_2(-Y_1, Y_2, r, s, \varepsilon) = -F_1(Y_1, Y_2, r, s, \varepsilon)$.

Todo esto implica que F_1 es impar en Y_1 para cada s, r, ε fijos. Tenemos así un problema típico de bifurcación para una ecuación escalar con simetría impar. Para aplicar los métodos apropiados y obtener expresiones aproximadas para

las ramas de soluciones, tenemos que calcular ciertas derivadas de \tilde{F}_1 , para ello, calcularemos primero las derivadas de F_2 , y después obtendremos las de \tilde{F}_1 por diferenciación implícita

$Y_2(Y_1, r, s, \epsilon)$ satisface

$$F_2 = (r-1)Y_2 - \int_{\Omega_\epsilon} h(Y_1 + Y_2 w_\epsilon) w_\epsilon + s^{-p/(p-1)} R_2(s^{1/(p-1)} Y, rs, \epsilon) = 0.$$

Como $h(-u) = -h(u)$, para $s = \epsilon = 0$ tenemos

$$\begin{aligned} F_2(Y_1, Y_2, r, 0, 0) &= (r-1)Y_2 - \frac{1}{2}(h(Y_1 + Y_2) - h(Y_1 - Y_2)) = \\ &= (r-1)Y_2 - \frac{1}{2}(h(Y_2 + Y_1) + h(Y_2 - Y_1)) \end{aligned}$$

Derivando, obtenemos

$$D_{Y_1} F_2 = (r-1)D_{Y_1} Y_2 - \frac{1}{2}(h'(Y_1 + Y_2)(1 + D_{Y_1} Y_2) + h'(Y_2 - Y_1)(D_{Y_1} Y_2 - 1)).$$

$$\begin{aligned} D_r F_2 &= Y_2 + (r-1)D_r Y_2 - \frac{1}{2}(h'(Y_2 + Y_1)D_r Y_2 + h'(Y_2 - Y_1)D_r Y_2) = \\ &= Y_2 + [r - 1 - \frac{1}{2}(h'(Y_2 + Y_1) + h'(Y_2 - Y_1))]D_r Y_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{Y_1}^2 F_2 &= (r-1)D_{Y_1}^2 Y_2 - \frac{1}{2}[h''(Y_2 + Y_1)(D_{Y_1} Y_2 + 1)^2 + h''(Y_2 + Y_1)D_{Y_1}^2 Y_2 + \\ &+ h''(Y_2 - Y_1)(D_{Y_1}^2 Y_2 - 1)^2 + h''(Y_2 - Y_1)D_{Y_1}^2 Y_2]. \end{aligned}$$

Vamos a evaluar estas funciones para $r = r^0 = p/(p-1)$,

$Y_1 = 0$, $Y_2 = Y_2^0 = (1/a(p-1))^{1/(p-1)}$. Como

$$D_{Y_2} F_2 = r^0 - 1 - h'(Y_2^0) = a(Y_2^0)^{p-1} - ap(Y_2^0)^{p-1} = a(1-p)(Y_2^0)^{p-1},$$

vemos:

$$D_{Y_1} F_2 = 0 \quad \text{implica} \quad D_{Y_1} Y_2(0, r^0, 0, 0) = 0$$

$$D_{Y_1}^2 F_2 = 0 \quad \text{implica} \quad (r^0 - 1 - h'(Y_2^0)) D_{Y_1}^2 Y_2 + h''(Y_2^0) = 0; \text{ entonces,}$$

$$D_{Y_1}^2 Y_2(0, r^0, 0, 0) = \frac{ap(p-1)(Y_2^0)^{p-2}}{a(1-p)(Y_2^0)^{p-1}} = -\frac{p}{Y_2^0}$$

$$D_r F_2 = 0 \quad \text{implica} \quad (r^0 - 1 - h'(Y_2^0)) D_r Y_2 + Y_2^0 = 0; \text{ entonces,}$$

$$D_r Y_2(0, r^0, 0, 0) = \frac{1}{a(p-1)(Y_2^0)^{p-2}}$$

Podemos ahora calcular $D_{Y_1}^2 \tilde{F}_1$ y otras derivadas que necesitaremos más adelante:

$$\tilde{F}_1(Y_1, r, 0, 0) = rY_1 - \frac{1}{2}(h(Y_2+Y_1) - h(Y_2-Y_1)).$$

$$D_{Y_1} \tilde{F}_1 = r - \frac{1}{2}[h'(Y_2+Y_1)(D_{Y_1} Y_2 + 1) - h'(Y_2-Y_1)(D_{Y_1} Y_2 - 1)].$$

$$D_{Y_1}^2 \tilde{F}_1 = -\frac{1}{2}[h''(Y_2+Y_1)(D_{Y_1}^2 Y_2 + 1)^2 + h'(Y_2+Y_1) D_{Y_1}^2 Y_2 - h''(Y_2-Y_1)(D_{Y_1} Y_2 - 1)^2 - h'(Y_2-Y_1) D_{Y_1}^2 Y_2].$$

$$\begin{aligned} D_{Y_1}^3 \tilde{F}_1 = & -\frac{1}{2}[h'''(Y_2+Y_1)(D_{Y_1} Y_2 + 1)^3 + 3h''(Y_2+Y_1) D_{Y_1}^2 Y_2 (D_{Y_1} Y_2 + 1) + \\ & + h'(Y_2+Y_1) D_{Y_1}^3 Y_2 - h'''(Y_2-Y_1)(D_{Y_1} Y_2 - 1)^3 - \\ & - 3h''(Y_2-Y_1) D_{Y_1}^2 Y_2 (D_{Y_1} Y_2 - 1) - h'(Y_2-Y_1) D_{Y_1}^3 Y_2]. \end{aligned}$$

$$D_{Y_1 r}^2 \tilde{F}_1 = 1 - \frac{1}{2} \left[h''(Y_2 + Y_1)(D_{Y_1} Y_2 + 1) - h'(Y_2 - Y_1)(D_{Y_1} Y_2 - 1) \right] D_r Y_2 - \\ - \frac{1}{2} \left[h'(Y_2 + Y_1) D_{Y_1 r}^2 Y_2 - h'(Y_2 - Y_1) D_{Y_1 r}^2 Y_2 \right].$$

Evaluyendo estas funciones para $r = r^0$, $Y_1 = 0$,
 $Y_2 = Y_2^0$, $s = \varepsilon = 0$, y recordando que $F_1(-Y_1, r, s, \varepsilon) = -F_1(Y_1, r, s, \varepsilon)$,
obtenemos:

$$D_{Y_1} \tilde{F}_1 = r^0 - h'(Y_2^0) = 0.$$

$$D_{Y_1}^2 \tilde{F}_1 = 0.$$

$$D_{Y_1}^3 \tilde{F}_1 = -h'''(Y_2^0) - 3h''(Y_2^0) D_{Y_1}^2 Y_2 = 2ap(p-1)(2p+2)(Y_2^0)^{p-3} > 0.$$

$$D_{Y_1 r}^2 \tilde{F}_1 = 1 - h''(Y_2^0) D_r Y_2 = 1-p < 0.$$

Al ser \tilde{F}_1 impar en Y_1 , podemos escribir

$$\tilde{F}_1(Y_1, r, s, \varepsilon) = Y_1 \tilde{f}_1(Y_1, r, s, \varepsilon)$$

donde \tilde{f}_1 es diferenciable en Y_1 , r , s y continua en ε .

Además, para $Y_1 = 0$ tenemos

$$D_{Y_1} \tilde{F}_1 = \tilde{f}_1; \quad D_{Y_1}^2 \tilde{F}_1 = 2D_{Y_1} \tilde{f}_1; \quad D_{Y_1}^3 \tilde{F}_1 = 3D_{Y_1}^2 \tilde{f}_1; \quad D_{Y_1 r}^2 \tilde{F}_1 = D_r \tilde{f}_1.$$

$$\text{y } \tilde{f}_1(-Y_1, r, s, \varepsilon) = -\tilde{f}_1(Y_1, r, s, \varepsilon).$$

Por lo tanto, el conjunto de soluciones de $\tilde{F}_1 = 0$
está formado por: (1) $Y_1 = 0$, y (2) el conjunto de solucio-
nes de $\tilde{f}_1 = 0$. Pero observemos que

$$\tilde{f}_1(0,0,0,0) = 0; \quad D_r \tilde{f}_1(0,0,0,0) = D_{Y_1}^2 \tilde{F}_1 = 1-p < 0;$$

$$D_{Y_1} \tilde{f}_1(0,r,s,\epsilon) = 0; \quad D_{Y_1}^2 \tilde{f}_1(0,0,0,0) = \frac{1}{3} D_{Y_1}^3 \tilde{F}_1 > 0.$$

Por consiguiente, podemos aplicar el Teorema de la Función Implícita y concluir que el conjunto de soluciones de $\tilde{f}_1 = 0$ (en el entorno de $(0, r^0, 0, 0)$) viene dado por una única función $r = r^*(Y_1, s, \epsilon)$, diferenciable en Y_1 , s y continua en ϵ , con las propiedades: $r^*(0,0,0) = r^0$;
 $r^*(-Y_1, s, \epsilon) = r^*(Y_1, s, \epsilon)$;

$$D_{Y_1}^2 r^*(0,0,0) = -(D_r f_1)^{-1} \left[D_{Y_1}^2 f_1 + 2(D_{Y_1}^2 r^* f_1)(D_{Y_1} r^*) + D_r^2 f_1 (D_{Y_1} r^*)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{p-1} \frac{1}{3} D_{Y_1}^3 F_1 > 0.$$

Llamemos $\tilde{r}(s, \epsilon) = r^*(0, s, \epsilon)$. Por las propiedades anteriores, vemos que $r^*(\cdot, s, \epsilon)$ alcanza su valor mínimo para $Y_1 = 0$, y este mínimo es estricto. Podemos entonces concluir:

- (i) Si $r > \tilde{r}(s, \epsilon)$, $\tilde{F}_1(Y_1, r, s, \epsilon) = 0$ tiene exactamente tres soluciones en el entorno de $(0, r^0, 0, 0)$, a saber $Y_1 = 0$ y $r = r^*(Y_1, s, \epsilon)$.
- (ii) Si $r \leq \tilde{r}(s, \epsilon)$, $\tilde{F}_1(Y_1, r, s, \epsilon) = 0$ tiene únicamente la solución trivial $Y_1 = 0$.

Estamos, pues, ante una bifurcación supercrítica de

tipo "tridente", cuyo diagrama es

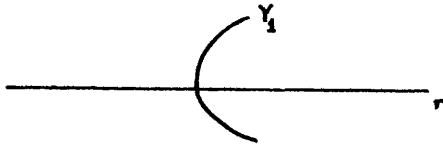


Figura nº 4

Este es precisamente el diagrama que se obtiene para $s = \epsilon = 0$ (si se quiere, analizando directamente las fórmulas (4.1)). Vemos así que, gracias a las simetrías presentes en el problema, la aparición de imperfecciones para $s, \epsilon > 0$ no rompe las conexiones del diagrama de bifurcación, y, por tanto, para cada $s, \epsilon > 0$ tiene lugar una bifurcación secundaria en $Y_1 = 0$, $Y_2 = Y_2(0, \bar{r}(s, \epsilon), s, \epsilon)$, $r = \bar{r}(s, \epsilon)$.

Consideremos ahora el valor negativo de Y_2^0 , es decir, $(Y_2^0)^- = -(1/a(p-1))^{1/(p-1)}$. Como antes, el Teorema de la Función Implícita nos da una función $Y_2 = Y_2^-(Y_1, r, s, \epsilon)$ tal que $Y_2^-(0, r^0, 0, 0) = (Y_2^0)^-$, y $F_2(Y_1, Y_2^-(Y_1, r, s, \epsilon), r, s, \epsilon) = 0$. Por la Proposición VI.4.4, $-Y_2^-(Y_1, r, s, \epsilon)$ también sería solución de la misma ecuación, y $-Y_2^-(0, r^0, 0, 0) = -(Y_2^0)^-$. Por tanto, hemos de tener $Y_2^-(Y_1, r, s, \epsilon) = -Y_2(Y_1, r, s, \epsilon)$, donde $Y_2(\dots)$ es la función que obtuvimos para el valor positivo de Y_2^0 .

De nuevo, definimos

$$\tilde{F}_1^-(Y_1, r, s, \epsilon) = F_1(Y_1, Y_2^-(Y_1, r, s, \epsilon), r, s, \epsilon)$$

y, por la Proposición VI.4.4, tenemos

$$\begin{aligned} F_1^-(Y_1, r, s, \epsilon) &= F_1(Y_1, -Y_2(Y_1, r, s, \epsilon), r, s, \epsilon) = \\ &= -F_1(Y_1, Y_2(Y_1, r, s, \epsilon), r, s, \epsilon) = -\tilde{F}_1^-(Y_1, r, s, \epsilon). \end{aligned}$$

Luego las soluciones de $F_1^- = 0$ coinciden con las soluciones de $F_1 = 0$, y el diagrama de bifurcación, así como el valor de bifurcación $\bar{r}(s, \epsilon)$, son los mismos obtenidos antes. Entonces, considerando conjuntamente las ramas positiva y negativa de Y_2 , vemos que el número de soluciones para $r \leq \bar{r}(s, \epsilon)$ y el número de soluciones para $r > \bar{r}(s, \epsilon)$ se diferencian en cuatro.

VI, 4, 1.2 $\bar{r}^0 = 0$.

Procederemos exactamente como en el caso anterior: aplicando el Teorema de la Función Implícita, obtenemos una función única $Y_2 = Y_2(Y_1, r, s, \epsilon)$ tal que

$F_2(Y_1, Y_2(Y_1, r, s, \epsilon), r, s, \epsilon) = 0$, $Y_2(0, 0, 0, 0) = 0$. Ahora bien, como $F_2(Y_1, 0, r, s, \epsilon) = 0$ para todo Y_1, r, s, ϵ , hemos de tener $Y_2(Y_1, r, s, \epsilon) = 0$ por unicidad.

Sustituyendo en F_1 , definimos

$$\tilde{F}_1(Y_1, r, s, \epsilon) = F_1(Y_1, 0, r, s, \epsilon) =$$

$$= r|\Omega_\varepsilon|Y_1 - s^{-p/(p-1)} \int_{\Omega_\varepsilon} g(s^{1/(p-1)}Y_1 + \hat{u}(s^{1/(p-1)}Y_1, 0, sr, \varepsilon)),$$

y como $u(\alpha, 0, \lambda, \varepsilon) = 0$ para todo $\alpha, \lambda, \varepsilon$, vemos que las soluciones de $\tilde{F}_1 = 0$ son las soluciones de

$$rY_1 - s^{-p/(p-1)}g(s^{1/(p-1)}Y_1) = 0, \text{ es decir, } Y_1 = 0 \text{ y}$$

$$r^*(Y_1, s, \varepsilon) = Y_1^{-1}g(s^{1/(p-1)}Y_1)s^{-p/(p-1)} = aY_1^{p-1} + o(|Y_1|^p)$$

o, en las variables iniciales α, β , las soluciones de $\lambda\alpha - g(\alpha) = 0$, que, obviamente, corresponden a las soluciones constantes de $-\Delta u = \lambda u - g(u)$.

VI.4.1.3 $r^0 = 1$

En este caso aplicaremos el Teorema de la Función Implícita a $F_1 = 0$, ya que $F_1(0, 0, r^0, 0, 0) = 0$ y $D_{Y_1} F_1(0, 0, r^0, 0, 0) = 1$. Obtenemos una única función $Y_1 = Y_1(Y_2, r, s, \varepsilon)$. Pero $F_1(0, Y_2, r, s, \varepsilon) = 0$ por la Proposición VI.4.4. Por tanto, $Y_1(Y_2, r, s, \varepsilon) = 0$. Sustituyendo en F_2 , definimos

$$\tilde{F}_2(Y_2, r, s, \varepsilon) = F_2(0, Y_2, r, s, \varepsilon) =$$

$$= (r-1)Y_2 - s^{-p/(p-1)} \int_{\Omega_\varepsilon} w_\varepsilon g(s^{1/(p-1)}Y_2 w_\varepsilon + \hat{u}(s^{1/(p-1)}Y_2, rs, \varepsilon))$$

Claramente, $\tilde{F}_2(-Y_2, r, s, \varepsilon) = -\tilde{F}_2(Y_2, r, s, \varepsilon)$; por tanto, $\tilde{F}_2(Y_2, r, s, \varepsilon) = Y_2 \tilde{f}_2(Y_2, r, s, \varepsilon)$, donde \tilde{f}_2 es diferenciable en r, s y continua en ε , y $\tilde{f}_2(-Y_2, r, s, \varepsilon) = \tilde{f}_2(Y_2, r, s, \varepsilon)$,

$$D_r \tilde{f}_2 = D_{Y_2}^2 \tilde{F}_2 = 1 \quad \text{para } Y_2 = 0, r = 1, s, \varepsilon = 0.$$

Por consiguiente, las soluciones de $\tilde{f}_2 = 0$ están dadas por una única función $r = r^*(Y_2, s, \varepsilon)$, con $r^*(0, s, \varepsilon) = 1$. Es fácil ver que r^* satisface

$$r^*(Y_2, s, \varepsilon) = a \left(\int_{\Omega_\varepsilon} w_\varepsilon^{p-1} \right) Y_2^{p-1} + o(|Y_2|^p).$$

Luego, para $|r-1|$, s , ε suficientemente pequeños,

- (i) Si $r > 1$, $\tilde{F}_2(Y_2, r, s, \varepsilon) = 0$ tiene exactamente tres soluciones, a saber, $Y_2 = 0$ y $r = r^*(Y_2, s, \varepsilon)$.
- (ii) Si $r \leq 1$, $F_2(Y_2, r, s, \varepsilon) = 0$ tiene únicamente la solución trivial $Y_2 = 0$.

VI.4.1.4 El diagrama de bifurcación completo

En VI.4.1 encontramos los únicos lugares donde puede haber bifurcación de soluciones, y en las secciones anteriores hemos analizado la estructura local de dichas bifurcaciones. Sólo nos queda, pues, compaginar todos estos resultados:

Existen exactamente tres superficies de bifurcación en el espacio $(\lambda, s, \varepsilon)$, que están dadas por funciones

$$\lambda = \lambda_j(s, \varepsilon) = r_j(s, \varepsilon)s, \text{ donde}$$

$$\begin{aligned} r_1(s, \varepsilon) &= 0 \\ r_2(s, \varepsilon) &= 1 \\ r_3(s, \varepsilon) &= \bar{r}(s, \varepsilon), \quad \bar{r}(0, 0) = p/(p-1). \end{aligned}$$

Hagamos $s = \lambda_\varepsilon$. Entonces, existen exactamente tres curvas de bifurcación en el plano (λ, ε) , cuya expresión es $\lambda = \lambda_j(\varepsilon) = r_j(\lambda_\varepsilon, \varepsilon)\lambda_\varepsilon$:

$$\begin{aligned} \lambda_1(\varepsilon) &= 0 \\ \lambda_2(\varepsilon) &= \lambda_\varepsilon \\ \lambda_3(\varepsilon) &= \frac{p}{p-1} \lambda_\varepsilon + o(\lambda_\varepsilon). \end{aligned}$$

Dibujemos estas curvas, escribiendo en cada región el número de soluciones de nuestras ecuaciones:

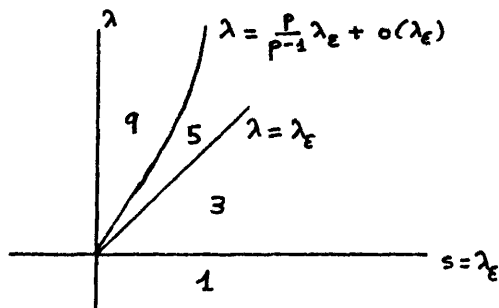


Figura n° 5

Cada punto de cada curva representa un punto de bifurcación "estricto", en el sentido de que es el punto de incidencia de dos curvas continuas de soluciones. Las curvas $\lambda = 0$ y $\lambda = \lambda_\varepsilon$ representan las bifurcaciones primarias que tienen lugar en los autovalores simples 0 y λ_ε , mientras que en la curva $\lambda = \lambda_3(\varepsilon)$ tienen lugar dos bifurcacio-

nes secundarias simultáneas.

Para ε fijo, $\varepsilon > 0$, el conjunto de soluciones, o conjunto de bifurcación, tiene la siguiente forma

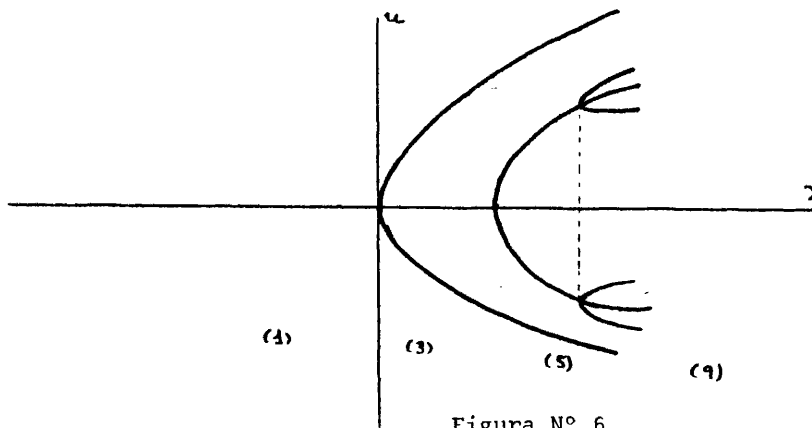


Figura N° 6

Para $\lambda > 0$ fijo, tenemos

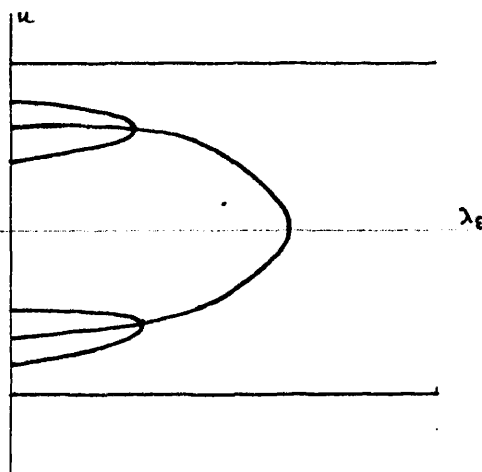


Figura n° 7

Observación: Estos resultados pueden aplicarse también a ciertas funciones que no verifican las condiciones del Teorema IV.1.1.

Por ejemplo, consideremos $g(u) = u^p$, p impar > 1 , cuyas derivadas no son acotadas en \mathbb{R} . Sin embargo, por los resultados del Capítulo I, todas las soluciones de $-\Delta_{\epsilon} u = \lambda u - u^p$ son fuertes, y, por tanto, acotadas (por el Teorema de Sobolev).

Y, por el principio de comparación, toda solución acotada de dicha ecuación satisface $-\lambda^{1/(p-1)} \leq u(x,y) \leq \lambda^{1/(p-1)}$, $(x,y) \in \Omega_{\epsilon}$. Por tanto, si definimos

$$\tilde{g}(u) = \begin{cases} u^p & \text{si } |u| \leq \delta \\ G(u) & \text{si } |u| > \delta \end{cases}$$

donde $uG(u) > 0$, $|G^{(k)}(u)| \leq G^{(k)}(\delta)$ si $|u| > \delta$, G es impar y \tilde{g} es C^{∞} , entonces, tomando $p\delta^{p-1} \leq k_1$ tenemos $|\tilde{g}'(u)| \leq k_1$, y todas las derivadas de \tilde{g} son acotadas. Estamos, pues, en condiciones de aplicar los resultados obtenidos en esta sección a la función \tilde{g} . Observemos ahora que las soluciones del problema original y las del nuevo problema $-\Delta_{\epsilon} u = \lambda u - \tilde{g}(u)$ que satisfacen $|u| \leq \lambda^{1/(p-1)}$ coinciden, siempre y cuando $|\lambda| \leq \delta^{p-1} \leq p^{-1}k_1$. Por tanto, el diagrama de soluciones es el mismo obtenido antes, y, además, tal diagrama es global en este caso, es decir, contiene todas las soluciones del problema para λ suficientemente pequeño.

VI.4.2 El caso $g(-u) = g(u)$

VI.4.2.1 $r^0 = -1/(p-1)$

El (posible) punto de bifurcación en consideración es $r^0 = -1/(p-1)$, $Y_1^0 = -(1/a(p-1))^{1/(p-1)}$, $Y_2^0 = 0$. Como $F_1(Y_1^0, 0, r^0, 0, 0) = 0$ y $D_{Y_1} F_1(Y_1^0, 0, r^0, 0, 0) = r^0 - h'(Y_1^0) \neq 0$, podemos aplicar el Teorema de la Función Implícita, obteniendo una solución única $Y_1 = Y_1(Y_2, r, s, \epsilon)$ que cumple $Y_1(0, r^0, 0, 0) = Y_1^0$, $Y_1(-Y_2, r, s, \epsilon) = Y_1(Y_2, r, s, \epsilon)$ (por la Proposición VI.4.4). Sustituyendo en F_2 , definimos $\tilde{F}_2(Y_2, r, s, \epsilon) = F_2(Y_1(Y_2, r, s, \epsilon), r, s, \epsilon)$. Nuevamente, por la Proposición VI.4.4, tenemos $F_2(-Y_2, r, s, \epsilon) = -F_2(Y_2, r, s, \epsilon)$.

De la misma forma que en el caso $g = \text{impar}$, nos encontramos ante un problema de bifurcación con simetría impar. Podemos, pues, escribir $\tilde{F}_2(Y_2, r, s, \epsilon) = Y_2 \tilde{f}_2(Y_2, r, s, \epsilon)$, donde \tilde{f}_2 es diferenciable en Y_2, r, s y continua en ϵ , y, además, $\tilde{f}_2(-Y_2, r, s, \epsilon) = \tilde{f}_2(Y_2, r, s, \epsilon)$.

Como en el caso impar, hemos de calcular varias derivadas de $Y_1(\dots)$ y \tilde{F}_2 para obtener las condiciones precisas que nos permitan obtener la rama de bifurcación (si existe), junto con sus propiedades de ser super-, sub- o transcítica. Debido a las simetrías, nos basta limitarnos a calcular las derivadas en $r = r^0$, con $s, \epsilon = 0$. Pero

$$F_1(Y_1, Y_2, r, 0, 0) = rY_1 - \frac{1}{2}[h(Y_1+Y_2) + h(Y_1-Y_2)]$$

tiene exactamente la misma forma que la expresión que obtuvimos en el caso impar para $r^0 = p/(p-1)$ si cambiamos $r-1$ por r e Y_2 por Y_1 . Igualmente,

$$\tilde{F}_2(Y_2, r, 0, 0) = (r-1)Y_2 - \frac{1}{2}[h(Y_1+Y_2) - h(Y_1-Y_2)]$$

tiene la misma forma que la función \tilde{F}_1 obtenida en el lugar mencionado si cambiamos r por $r-1$ e Y_1 por Y_2 . Por tanto, efectuando las mismas operaciones que hicimos en VI.4.1.1, hallamos

$$D_{Y_2} Y_1(0, r, s, \epsilon) = 0 \quad (\text{pues } Y_1(\cdot, r, s, \epsilon) \text{ es par})$$

$$D_{Y_2}^2 Y_1(0, r^0, 0, 0) = -(r^0 - h'(Y_1^0))^{-1} h''(Y_1^0) = a/Y_1^0.$$

$$D_r Y_1(0, r^0, 0, 0) = -(r^0 - h'(Y_1^0))^{-1} Y_1^0 = 1/a(p-1)(Y_1^0)^{p-2}$$

$$D_{Y_2} \tilde{F}_2(0, r^0, 0, 0) = 0.$$

$$D_{Y_2}^2 \tilde{F}_2(0, r, s, \epsilon) = 0.$$

$$D_{Y_2}^3 \tilde{F}_2(0, r^0, 0, 0) = -h'''(Y_1^0) - 3h''(Y_1^0) = 2ap(p-1)(2p+2)(Y_1^0)^{p-3} < 0.$$

$$D_{Y_2}^2 r \tilde{F}_2(0, r^0, 0, 0) = 1 - h''(Y_1^0) D_r Y_1 = 1-p < 0.$$

$$\tilde{f}_2 = D_{Y_2} \tilde{F}_2; \quad D_{Y_2} \tilde{f}_2 = \frac{1}{2} D_{Y_2}^2 \tilde{F}_2; \quad D_{Y_2}^2 \tilde{f}_2 = \frac{1}{3} D_{Y_2}^3 \tilde{F}_2; \quad D_r \tilde{f}_2 = D_{Y_2}^2 r \tilde{F}_2.$$

Las soluciones de $\tilde{F}_2 = 0$ serán $Y_2 = 0$ más el conjunto de soluciones de $\tilde{f}_2 = 0$. Como $\tilde{f}_2(0, r^0, 0, 0) = 0$ y

$D_r f_2(0, r^0, 0, 0) = 1-p \neq 0$, concluimos que el conjunto $\tilde{f}_2 = 0$ consiste de una única superficie $r = r^*(Y_2, s, \epsilon)$ que verifica $r^*(0, 0, 0) = r^0$ y $r^*(-Y_2, s, \epsilon) = r^*(Y_2, s, \epsilon)$; además,

$$D_{Y_2}^2 r^*(0, 0, 0) = -(D_r \tilde{f}_2)^{-1} D_{Y_2}^2 \tilde{f}_2 = \frac{1}{p-1} \frac{1}{3} D_{Y_2}^3 \tilde{f}_2(0, r^0, 0, 0) < 0.$$

Por consiguiente, para $s, \epsilon, |r - r^0|$ suficientemente pequeños, tenemos

- (i) Si $r < r^*(0, s, \epsilon)$, $\tilde{f}_2 = 0$ tiene exactamente tres soluciones, $Y_2 = 0$ y $r = r^*(Y_2, s, \epsilon)$.
- (ii) Si $r \geq r^*(0, s, \epsilon)$, $\tilde{f}_2 = 0$ tiene la única solución $Y_2 = 0$.

Observación: Nuevamente vemos que la presencia de imperfecciones para $\epsilon > 0$ no rompe las conexiones del diagrama de bifurcación, y se da una bifurcación secundaria para todo ϵ pequeño. Sin embargo, en este caso el hecho de que g es par se ha utilizado únicamente para asegurar que p es par. Esto quiere decir que dicha bifurcación secundaria seguirá existiendo incluso en presencia de perturbaciones de orden superior de cualquier tipo, en contraste con la bifurcación secundaria estudiada en VI.4.1.1, en la cual el hecho de que g (y no sólo p) es impar se empleó sistemáticamente.

VI.4.2.2 $r^0 = 0$

Procediendo exactamente como en VI.4.1.2, concluimos que las soluciones de nuestras ecuaciones en el entorno de $r^0 = 0$, $Y^0 = 0$, $s = 0$, $\epsilon = 0$ vienen dadas por $Y_1 = Y_2 = 0$ y $Y_2 = 0$, $r = aY_1^{p-1} + o(|Y_1|^p)$. En las variables de partida α, β, λ , éstas representan las soluciones constantes de $-\Delta u = \lambda u - g(u)$.

VI.4.2.3 $r^0 = 1$

Por el Teorema de la Función Implícita existe una única función $Y_1 = Y_1(Y_2, r, s, \epsilon)$ tal que

$$F_1(Y_1(Y_2, r, s, \epsilon), Y_2, r, s, \epsilon) = 0; \text{ además, } Y_1(0, r^0, 0, 0) = 0,$$

$$Y_1(-Y_2, r, s, \epsilon) = Y_1(Y_2, r, s, \epsilon) \text{ y}$$

$$D_{Y_2}^k Y_1(0, r, s, \epsilon) = 0 \text{ para } k = 1, 2, \dots, p-1$$

$$D_{Y_2}^p Y_1(0, r^0, 0, 0) = p!a \neq 0.$$

Como siempre, definimos

$$\tilde{F}_2(Y_2, r, s, \epsilon) = F_2(Y_1(Y_2, r, s, \epsilon), Y_2, r, s, \epsilon).$$

$$\text{Es fácil ver que } \tilde{F}_2(-Y_2, r, s, \epsilon) = \tilde{F}_2(Y_2, r, s, \epsilon).$$

Como $D_{Y_2}^2 \tilde{F}_2 = 1$, las soluciones de $\tilde{F}_2 = 0$ están dadas por $Y_2 = 0$ y una única función $r(Y_2, s, \epsilon)$, que satisface $r(0, 0, 0) = r^0$, $r(-Y_2, s, \epsilon) = r(Y_2, s, \epsilon)$. Por otra parte,

$$\tilde{F}_2(Y_2, r^0, 0, 0) = -\frac{1}{2} [h(Y_1(Y_2, r^0, 0, 0) + Y_2) - h(Y_1(Y_2, r^0, 0, 0) - Y_2)]$$

$$\text{y } Y_1(Y_2, r^0, 0, 0) = aY_2^p + o(|Y_2|^{p+1}). \text{ Por tanto,}$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_2(Y_2, r^0, 0, 0) &= -\frac{1}{2} a [(aY_2^p + o(|Y_2|^{p+1}) + Y_2)^p - \\ &\quad - (aY_2^p + o(|Y_2|^{p+1}) - Y_2)^p] = -a^2 p Y_2^{2p-1} + o(|Y_2|^{2p}). \end{aligned}$$

Vemos que la primera derivada de $r(\cdot, 0, 0)$ que no se anula para $Y_2 = 0$ es la de orden $2p-2$, y es positiva ($= a^2 p(2p-1)!$); esto significa que la bifurcación es supercrítica para $s=0$, $\epsilon=0$. Si queremos deducir que lo mismo sucede para $s > 0$, $\epsilon > 0$ (pequeños), tendremos que demostrar que todas las derivadas de $r(\cdot, s, \epsilon)$, hasta el orden $2p-3$, se anulan para $Y_2 = 0$, lo cual no es claro en absoluto, pues todo lo que sabemos hasta este momento es que se anulan las derivadas hasta el orden $p-1$. De hecho, es aquí donde la hipótesis completa de que g es par (y no sólo p) es esencial. En el argumento que presentamos a continuación se ve claramente que si p es par y g no es una función par, la primera derivada de r que no se anula puede ser negativa, lo cual implicaría que la bifurcación es subcrítica. Por otra parte, la hipótesis " g es par" es demasiado fuerte; otras condiciones más ajustadas aparecerán más adelante.

Escribamos la fórmula completa correspondiente a

$$\tilde{F}_2,$$

$$\tilde{F}_2 = (r-1)Y_2 - s^{-p/(p-1)} \int_{\Omega_\varepsilon} \left[g(s^{1/(p-1)}(Y_1 + Y_2 w_\varepsilon)) + \right. \\ \left. + \hat{u}(s^{1/(p-1)}Y, rs, \varepsilon) w_\varepsilon \right]$$

y desarrollemos g en potencias pares de u :

$$g(u) = au^p + a_2 u^{p^2} + \dots$$

$$\text{Es fácil ver que } D_{\alpha_1 \beta_2}^{s_1 + s_2} \hat{u}(0, 0, \lambda, \varepsilon) = 0 \text{ si}$$

$s_1 + s_2 \leq p-1$, y es $\neq 0$ si $s_1 + s_2 = p$. Esto se deduce de la expresión

$$D_{\alpha_1 \beta_2}^{s_1 + s_2} \hat{u} = \hat{K}_\varepsilon(I-P_\varepsilon) D_{\alpha_1 \beta_2}^{s_1 + s_2} \hat{u} + \hat{K}_\varepsilon(I-P_\varepsilon) D_{\alpha_1 \beta_2}^{s_1 + s_2} g(\alpha + \beta w_\varepsilon + \hat{u})$$

(todos los términos evaluados en $(0, 0, \lambda, \varepsilon)$).

Por tanto, $\hat{u}(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon) = O((|\alpha| + |\beta|)^p)$ uniformemente en λ, ε . Esto implica

$$\hat{u}(s^{1/(p-1)}Y_1, s^{1/(p-1)}Y_2, rs, \varepsilon) = \\ = \frac{1}{p!} s^{p/(p-1)} D_{\beta^p}^p \hat{u}(0, 0, rs, \varepsilon) Y_2^p + O(|s^{1/(p-1)}Y_2|^{p+1})$$

Tomemos uno cualquiera de los términos del desarrollo de g , por ejemplo, cu^k (k par). Tenemos:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (s^{1/(p-1)}(Y_1 + Y_2 w_\varepsilon) + \hat{u})^k w_\varepsilon =$$



$$\sum_{A+B+C=k} M_{ABC}^{(k)} \int_{\Omega_\epsilon} (s^{1/(p-1)}_{Y_1})^A (s^{1/(p-1)}_{Y_2})^B (\hat{u})^C w_\epsilon^{B+1}$$

donde el término correspondiente a $B=k, A=C=0$ no aparece, pues, al ser w_ϵ impar en x, y k par, tenemos

$$\int_{\Omega_\epsilon} w_\epsilon^{k+1} = 0. \text{ Además, } M_{ABC}^{(k)} = k!/A!B!C!$$

Buscamos la mínima potencia de Y_2 que aparece en la fórmula anterior; esto equivale a elegir $B < k$ tal que $Ap+B+Cp$ sea mínimo, con la restricción $A+B+C=k$. Como k es par, este mínimo se alcanza evidentemente para $B=k-1, A+C=1$. Así, la expresión toma la forma

$$\left[s^{k/(p-1)} M_{1,k-1,0}^{(k)} a \left(\int_{\Omega_\epsilon} w_\epsilon^k \right) + \frac{1}{p!} M_{0,k-1,1}^{(k)} s^{p/(p-1)} \right. \\ \left. * \int_{\Omega_\epsilon} D_{\beta^p}^p \hat{u}(0,0,rs,\epsilon) w_\epsilon^k \right] Y_2^{p+k-1} + o(Y_2^{p+k}).$$

Vemos así que la mínima potencia de Y_2 aparece cuando $k=p$. Teniendo en cuenta que $\int_{\Omega_\epsilon} w_\epsilon^{2k}$ es acotado (cuando $\epsilon \rightarrow 0$) y $D_{\beta^p}^p \hat{u}(0,0,rs,\epsilon) = o(\epsilon^{1/m})$ en L^2 para cualquier $m > 2$, el término dominante dentro del corchete (para $k=p$) es el primero. Volviendo a la expresión de F_2 , obtenemos

$$\tilde{F}_2 = (r-1)Y_2 - \left[a^2 p \left(\int_{\Omega_\epsilon} w_\epsilon^k \right) + o(\epsilon^{1/m}) \right] Y_2^{2p-1} + o(|Y_2|^{2p}).$$

Por tanto, la bifurcación es supercrítica.

Nota: Si analizamos los cálculos recién efectuados y consideramos la posibilidad de que hubiera potencias de orden impar en el desarrollo de g , podemos ver que si k es impar y $k \leq 2p-1$, el término correspondiente a $B=k$, $A=C=0$ sería el dominante, y la expresión de \tilde{F}_2 sería

$$\tilde{F}_2 = (r-1)Y_2 - \frac{1}{p!} g^{(k)}(0) s^{(k-p)/(p-1)} \left(\int_{\Omega_\epsilon} w_\epsilon^{k+1} \right) Y_1^k + \dots$$

Entonces: si $g^{(k)}(0) \geq 0$ para todo k impar, $k \leq 2p-1$, la bifurcación es supercrítica; si $g^{(k)}(0) < 0$ para algún k impar, $k \leq 2p-1$, se tiene el siguiente diagrama



Figura n° 8

Este es el caso, por ejemplo, de $g(u) = u^2 - u^3 \dots$

En cambio, para la función $g(u) = au^2 + u^3$ (que estudiaremos en el próximo capítulo), la bifurcación es supercrítica y "genérica", en el sentido de que la rama de bifurcación es una parábola (más términos de orden superior).

VI.4.2.4 El diagrama de bifurcación completo

Al igual que en VI.4.1.4, obtenemos exactamente tres curvas de bifurcación en el plano (λ, ϵ) :

$$\lambda_1(\epsilon) = 0$$

$$\lambda_2(\epsilon) = \lambda_\epsilon$$

$$\lambda_3(\epsilon) = (-1/(p-1))\lambda_\epsilon + o(\lambda_\epsilon)$$

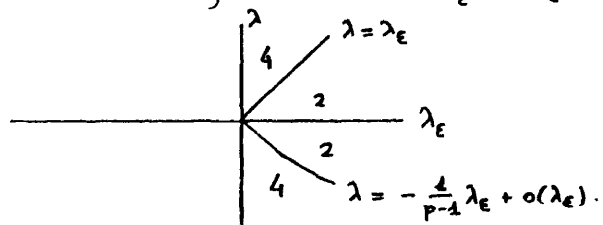


Figura n° 9

Para ϵ fijo, el diagrama de bifurcación es

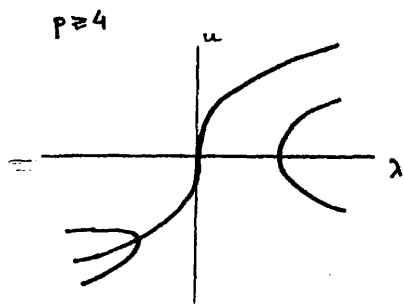


Figura n°10

y, para λ fijo,

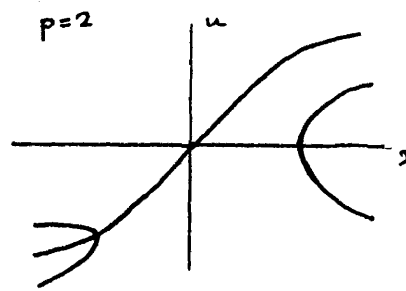


Figura n° 11

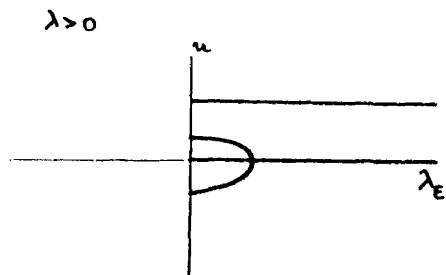


Figura n° 12

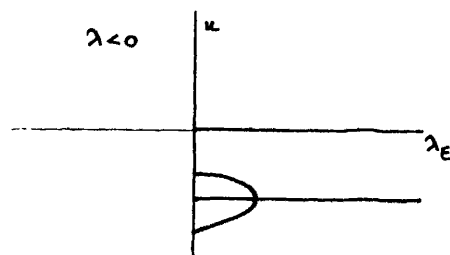


Figura n° 13

CAPITULO VII

EL CASO CRITICO CON FUNCION NO SIMETRICA

En este capítulo vamos a considerar la función $g(u) = au^2 + u^3 + \dots$, que es una "mezcla" de los casos $g = \text{par}$ y $g = \text{impar}$ recién analizados. Nuestro objetivo es analizar el comportamiento del conjunto de soluciones cuando el parámetro a tiende a cero, con la idea de ver de qué forma la estructura de bifurcación correspondiente a $g(u) = au^2$ (que, como vimos, resulta ser la misma de $g(u) = au^2 + u^3$ en un entorno de 0) se transforma en la estructura de bifurcación correspondiente a $g(u) = u^3$.

La ecuación objeto de nuestro análisis tiene la forma

$$(0,1) \quad \lambda L_1(\epsilon)X + sL_2(\epsilon)X + aQ(X,\epsilon) + C(X,\epsilon) + R(X,\lambda,\epsilon) = 0$$

donde, como de costumbre, $L_1(\epsilon)$ y $L_2(\epsilon)$ son matrices 2×2 , $Q(\cdot, \epsilon)$ y $C(\cdot, \epsilon)$ son polinomios cuadrático y cúbico, respectivamente, $|R(X,\lambda,\epsilon)| = O(|X|^4)$ uniformemente en λ, ϵ , y todas las funciones, junto con sus derivadas, son continuas en ϵ .

El método de análisis será esencialmente el mismo empleado en el Capítulo VI: obtener una acotación a priori para soluciones "pequeñas", y definir nuevas variables mediante

algún cambio de escala. Como ahora tenemos tres parámetros, λ , s y a , si queremos asegurar que no hay pérdida de soluciones a causa del cambio de variables, tendremos que efectuar estos cambios de tres formas distintas, cada una de las cuales da lugar a un problema de bifurcación con dos parámetros que ha de analizarse para todos los valores posibles de dichos parámetros (no sólo para valores "pequeños"). Esta observación, junto con el hecho de que la propiedad $Y_1 Y_2 = 0$ (Proposición VI.4.2) de los (posibles) puntos de bifurcación ya no se verifica, hacen mucho más complicado el análisis de este problema, y, en particular, incrementa el número de curvas de bifurcación y produce ciertos "bucles" en el conjunto de bifurcación cuando el parámetro a es grande en comparación con λ y s .

VII.1 Acotación a priori

Lema VII.1.1 Supongamos que $C(X,0) = 0$ implica $X = 0$. Entonces, existe un entorno U de $X = 0$ y existen $\rho > 0$, $K > 0$ tales que toda solución de (0.1) con $X \in U$, $|a|, |\lambda|, |s|, \varepsilon \leq \rho$ satisface

$$(1.1) \quad |X| \leq K \left[|\lambda|^{\frac{1}{2}} + |s|^{\frac{1}{2}} + |a| \right].$$

Demostración: Es análoga a la del Lema VI.3.1.

VII.2 Eliminación de s

Definamos las variables Y, r, \bar{a} como sigue:

$$(2.1) \quad X = s^{\frac{1}{2}}Y, \quad \lambda = rs, \quad a = s^{\frac{1}{2}}\bar{a}.$$

El Lema VII.1.1 implica que mediante este cambio de variables no se pierde ninguna solución y que Y es acotado (es decir, no existe ninguna sucesión de soluciones tal que $|Y_j| \rightarrow \infty$). Supondremos que r y \bar{a} son también acotados; los casos $\lambda/s \rightarrow \infty$, $a/s^{\frac{1}{2}} \rightarrow \infty$ se analizarán empleando otros cambios de variable.

La ecuación (0.1) se convierte en

$$(2.2) \quad rL_1(\epsilon)Y + L_2(\epsilon)Y + \bar{a}Q(Y, \epsilon) + C(Y, \epsilon) + s^{-3/2}R(s^{\frac{1}{2}}Y, rs, \epsilon) = 0$$

Si $(Y_j, r_j, \bar{a}_j, s_j, \epsilon_j)$ son posibles puntos de bifurcación tales que $s_j \rightarrow 0$, $\epsilon_j \rightarrow 0$, r_j, \bar{a}_j acotados cuando $j \rightarrow \infty$, entonces todo punto de acumulación de la sucesión debe satisfacer

$$(2.3) \quad \begin{cases} rL_1(0)Y + L_2(0)Y + \bar{a}Q(Y, 0) + C(Y, 0) = 0 \\ \det(rL_1(0) + L_2(0) + \bar{a}D_Y Q(Y, 0) + D_Y C(Y, 0)) = 0 \end{cases}$$

donde

$$Q(Y, 0) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{a}(Y_1 + Y_2)^2 + \bar{a}(Y_1 - Y_2)^2 \\ \bar{a}(Y_1 + Y_2)^2 - \bar{a}(Y_1 - Y_2)^2 \end{pmatrix}$$

$$C(Y,0) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} (Y_1+Y_2)^3 + (Y_1-Y_2)^3 \\ (Y_1+Y_2)^3 - (Y_1-Y_2)^3 \end{pmatrix}$$

Equivalentemente

$$(2.4) \quad \begin{cases} rY_1 - \bar{a}Y_1^2 - \bar{a}Y_2^2 - 3Y_1Y_2^2 - Y_1^3 = 0 \\ (r-1)Y_2 - 2\bar{a}Y_1Y_2 - 3Y_1^2Y_2 - Y_2^3 = 0 \\ \Delta \equiv \begin{vmatrix} r-2\bar{a}Y_1-3Y_1^2-3Y_2^2 & -2\bar{a}Y_2-6Y_1Y_2 \\ -2\bar{a}Y_2-6Y_1Y_2 & r-1-2\bar{a}Y_1-3Y_1^2-3Y_2^2 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

Multiplicando la primera columna de Δ por Y_1 , la segunda por Y_2 y aplicando las dos primeras ecuaciones, obtenemos

$$Y_1Y_2\Delta = -Y_2^3(32Y_1^3 + 22\bar{a}Y_1^2 + 4\bar{a}Y_1 + 2\bar{a}Y_2^2)$$

Si $\bar{a} = 0$, entonces $\Delta = 0$ si y sólo si $Y_1Y_2 = 0$.

Si $\bar{a} \neq 0$, expresando $Y_1 = \bar{a}Y_1^*$, $Y_2 = \bar{a}Y_2^*$ vemos que $\Delta = 0$, $Y_1Y_2 \neq 0$ si y sólo si

$$(2.5) \quad 16Y_1^{*3} + 11Y_1^{*2} + 2Y_1^* + Y_2^{*2} = 0.$$

Multiplicando la primera ecuación de (2.4) por Y_2 , la segunda por $-Y_1$ y sumando, obtenemos

$$Y_1Y_2 + \bar{a}Y_1^2Y_2 - \bar{a}Y_2^3 + 2Y_1^3Y_2 - 2Y_1Y_2^3 = 0.$$

Si $Y_1 \neq 0$, esto es equivalente a

$$(2.6) \quad 2Y_1^3 - 2Y_1^*Y_2^{*2} + Y_1^{*2} - Y_2^{*2} - (\bar{a})^{-2} Y_1^* = 0.$$

Por (2.5) y (2.6),

$$(2.7) \quad 4Y_1^3 + 5Y_1^{*2} + 2Y_1^* + (2\bar{a}^2 + 1)/8\bar{a}^2 = 0$$

Analicemos la función

$$(2.8) \quad V(x, d) = 4x^3 + 5x^2 + 2x + d$$

para distintos valores de $d > 1/4$ (ya que $(2\bar{a}^2 + 1)/8\bar{a}^2 > 1/4$ para todo \bar{a}):

$$D_x V(x, d) = 12x^2 + 10x + 2 = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad x = -\frac{1}{3} \quad \text{ó} \quad x = -\frac{1}{2}$$

$$V(-\frac{1}{3}, d) = -\frac{7}{27} + d.$$

$$V(-\frac{1}{2}, d) = -\frac{1}{4} + d.$$

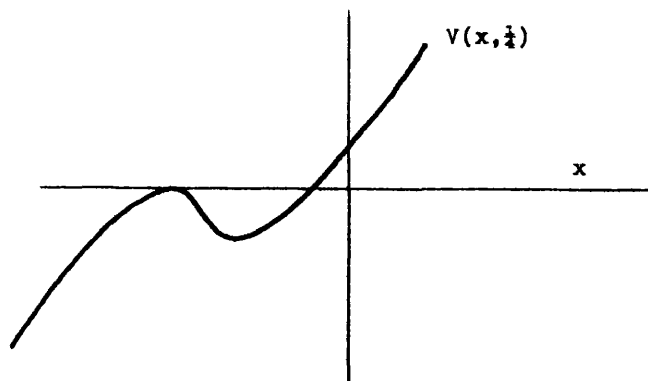


Figura n° 14

Por lo tanto:

Si $\frac{1}{4} < d < \frac{7}{27}$, $V(x,d) = 0$ tiene exactamente tres raíces negativas.

Si $\frac{7}{27} < d$, $V(x,d) = 0$ tiene exactamente una raíz negativa.

Volviendo a (2.5), tenemos

$$Y_2^* = -16Y_1^{*3} - 11Y_1^{*2} - 2Y_1^* = -Y_1^*(16Y_1^{*2} + 11Y_1^* + 2)$$

Ahora bien, $11^2 - (8)(16) < 0$, por lo cual $16Y_1^{*2} + 11Y_1^* + 2 > 0$

para todo Y_1^* . Esto quiere decir que para cada raíz negativa de (2.7) obtenemos exactamente dos valores de Y_2^* que satisfacen (2.5).

En función de \bar{a} , la clasificación anterior es:

Si $\bar{a}^2 < \frac{27}{2}$, (2.7) tiene exactamente una raíz real $v_1(\bar{a})$, que es negativa; ésta da dos valores de Y_2^* , $\pm b_1(\bar{a})$.

Si $\bar{a}^2 > \frac{27}{2}$, (2.7) tiene exactamente tres raíces $v_1(\bar{a}) < v_2(\bar{a}) < v_3(\bar{a})$, todas ellas negativas. A éstas corresponden seis valores de Y_2^* , $\pm b_1(\bar{a})$, $\pm b_2(\bar{a})$, $\pm b_3(\bar{a})$.

Para calcular los valores correspondientes de r , dividimos la segunda ecuación de (2.4) por Y_2 ; expresando el resultado en términos de Y_1^* , Y_2^* , obtenemos

$$\frac{r-1}{\bar{a}^2} = Y_2^{*2} + 3Y_1^{*2} + 2Y_1^*$$

Por (2.5), $\frac{r-1}{\bar{a}^2} = -16Y_1^{*3} - 8Y_1^{*2}$, que, junto con (2.7),

da

$$(2.10) \quad \frac{r-1}{\bar{a}^2} = 12Y_1^{*2} + 8Y_1^* + \frac{2\bar{a}^2+1}{2\bar{a}^2}$$

Para cada valor de Y_1^* obtenemos exactamente un valor de r . Llamaremos $r_1(\bar{a})$ al valor de r obtenido a partir de (2.10), correspondiente a la raíz $v_1(\bar{a})$ de (2.7). Así, $r_1(\bar{a})$ está definido para todo valor de \bar{a} , mientras que $r_2(\bar{a})$ y $r_3(\bar{a})$ están definidos solamente si $\bar{a}^2 > 27/2$.

Estas son todas las posibles soluciones de (2.4) que satisfacen $\bar{a}Y_1Y_2 \neq 0$. Nos queda analizar el caso restante, es decir $Y_1Y_2 = 0$. Supondremos que $\bar{a} \neq 0$, ya que $\bar{a} = 0$ puede obtenerse como límite de los casos anteriores.

1) $Y_1 = 0, Y_2 \neq 0$.

Si $Y_1 = 0$, entonces $-\bar{a}Y_2 = 0$, lo que implica $Y_2 = 0$.

2) $Y_1 \neq 0, Y_2 = 0$.

Tenemos que resolver en este caso

$$\begin{cases} rY_1 - \bar{a}Y_1^2 - Y_1^3 = 0 \\ \Delta \equiv \begin{vmatrix} r - 2\bar{a}Y_1 - 3Y_1^2 & 0 \\ 0 & r - 1 - 2\bar{a}Y_1 - 3Y_1^2 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

Como $Y_1 \neq 0$, la primera ecuación se reduce a
 $r - \bar{a}Y_1 - Y_1^2 = 0$. Sustituyendo, vemos que

$$\Delta = 2Y_1(\bar{a} + 2Y_1) \left[(Y_1 + \frac{\bar{a}}{4})^2 + \frac{1}{2} - \frac{\bar{a}^2}{16} \right].$$

Las raíces de $\Delta = 0$ son:

- a) $Y_1 = -\bar{a}/2$; entonces, $r = -\bar{a}^2/4$.
 b) Si $\bar{a}^2 > 8$, $Y_1 = -\frac{\bar{a}}{4} \pm \frac{1}{4}(\bar{a}^2 - 8)^{\frac{1}{2}}$, entonces,

$$r = -\frac{1}{2} - \frac{\bar{a}^2}{8} \pm \frac{\bar{a}}{8}(\bar{a}^2 - 8)^{\frac{1}{2}}.$$

 3) $Y_1 = Y_2 = 0$.

En este caso, $\Delta = 0$ si y sólo si $r = 0$ ó $r = 1$.

En resumen, hemos obtenido lo siguiente:

Proposición VII.3.1 Las soluciones de (2.4) son:

- 1) Para todo valor de $\bar{a} \neq 0$:

r	Y_1	Y_2
0	0	0
1	0	0
$-\bar{a}^2/4$	$-\bar{a}/2$	0
$r_1(\bar{a})$	$\bar{a}v_1(\bar{a})$	$\pm \bar{a}b_1(\bar{a})$

2) Sólo para $\bar{a}^2 > 8$:

r	Y_1	Y_2
$-\frac{1}{2} - \frac{\bar{a}^2}{8} \pm \frac{\bar{a}}{8}(\bar{a}^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$	$-\frac{\bar{a}^2}{4} \pm \frac{1}{4}(\bar{a}^2 - 8)^{\frac{1}{2}}$	0

3) Sólo para $\bar{a}^2 > 27/2$:

$r_2(\bar{a})$	$\bar{a}v_2(\bar{a})$	$\pm \bar{a}b_2(\bar{a})$
$r_3(\bar{a})$	$\bar{a}v_3(\bar{a})$	$\pm \bar{a}b_3(\bar{a})$

donde $v_i(\bar{a})$ ($i = 1, 2, 3$) son las raíces reales de

$$4v^3 + 5v^2 + 2v + \frac{2\bar{a}^2 - 1}{8\bar{a}^2} = 0$$

con la ordenación $v_1(\bar{a}) < v_2(\bar{a}) < v_3(\bar{a})$. v_2 y v_3

existen solamente si $\bar{a}^2 > 27/2$.

$r_i(\bar{a})$ está dado por cualquiera de las fórmulas:

$$r_i(\bar{a}) = -8\bar{a}^2 [2v_i(\bar{a})^3 + v_i(\bar{a})^2] + 1.$$

$$r_i(\bar{a}) = \bar{a}^2 \left[12v_i(\bar{a})^2 + 8v_i(\bar{a}) + \frac{2\bar{a}^2 + 1}{2\bar{a}^2} \right] + 1.$$

$b_i(\bar{a})$ está dado por cualquiera de las fórmulas:

$$b_i(\bar{a})^2 = -16v_i(\bar{a})^3 - 11v_i(\bar{a})^2 - 2v_i(\bar{a})$$

$$b_i(\bar{a})^2 = -3v_i(\bar{a})^2 - 6v_i(\bar{a}) + (2\bar{a}^2 + 1)/2\bar{a}^2.$$

Además, se verifican las siguientes propiedades:

- (i) $v_1(\bar{a}) < -1/2$ para todo $\bar{a} \neq 0$.
- (ii) $v_1(\bar{a}) < -1/2 < v_2(\bar{a}) < -1/3 < v_3(\bar{a}) < -1/4$ si $\bar{a}^2 > 27/2$.
- (iii) $r_1(\bar{a}) > 1$, y $\left. \begin{array}{l} r_1(\bar{a}) \rightarrow 3/2 \\ \bar{a}v_1(\bar{a}) \rightarrow 0 \\ \bar{a}^2b_1(\bar{a})^2 \rightarrow 1/2 \end{array} \right\}$ cuando $\bar{a} \rightarrow 0$

- (iv) Para $\bar{a}^2 > 27/2$, se tiene $r_3(\bar{a}) < r_2(\bar{a})$ y

$$-\frac{\bar{a}^2}{4} < -\frac{1}{2} - \frac{\bar{a}^2}{8} \left(1 - \frac{8}{\bar{a}^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\bar{a}^2}{8} < r_3(\bar{a}) < r_2(\bar{a}) <$$

$$< -\frac{1}{2} + \frac{\bar{a}^2}{8} \left(1 - \frac{8}{\bar{a}^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\bar{a}^2}{8} < 0$$

para todo \bar{a} en un entorno de $27/2$, $\bar{a} > 27/2$.

Demostración: Los valores que aparecen en la tabla fueron calculados antes. Tenemos, pues, que demostrar (i)-(iv):

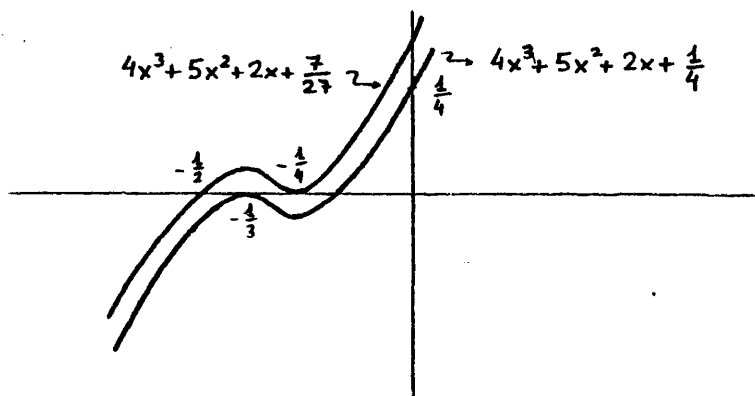


Figura n° 15

(i) y (ii) se deducen fácilmente de la figura anterior.

(iii):

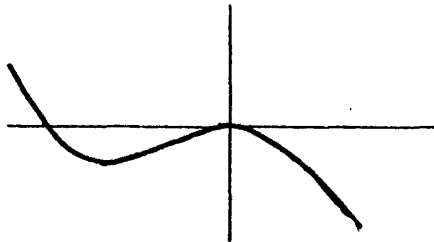


Figura n° 16

Esta figura muestra claramente que $\frac{r_1(\bar{a})-1}{8\bar{a}^2} > 0$, pues $v_1(\bar{a}) < -1/2$.

Para calcular los límites, consideremos la ecuación $4v^3 + 5v^2 + 2v + t = 0$, y sea $v(t)$ la única raíz real para $t \gg 1$. Como $v(t) = O(t^{1/3})$, tenemos $t^{-1}v(t) \rightarrow 0$, $t^{-1}v(t)^2 \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. En nuestro caso, $t = (2\bar{a}^2 + 1)/8\bar{a}^2 \rightarrow \infty$ cuando $\bar{a} \rightarrow 0$; por tanto, $\bar{a}^2 v(\bar{a}) \rightarrow 0$, $\bar{a}^2 v(\bar{a})^2 \rightarrow 0$ cuando $\bar{a} \rightarrow 0$, y (iii) se sigue fácilmente de las fórmulas correspondientes a $r_1(\bar{a})$ y $b_1(\bar{a})$.

(iv): A partir de las figuras puede verse que

$\frac{1}{2}(v_2(\bar{a}) + v_3(\bar{a})) < -1/3$. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\bar{a}^2}(r_2(\bar{a}) - r_3(\bar{a})) &= 3v_2(\bar{a})^2 + 2v_2(\bar{a}) - 3v_3(\bar{a})^2 - 2v_3(\bar{a}) = \\ &= 6(v_2(\bar{a}) - v_3(\bar{a}))(\frac{1}{2}(v_2(\bar{a}) + v_3(\bar{a})) + (1/3)) > 0. \end{aligned}$$

Para $\bar{a}^2 = 27/2$, tenemos: $-\bar{a}^2/4 = -3.375$,

$$-\frac{1}{2} - \frac{\bar{a}^2}{8} - \frac{\bar{a}^2}{8}(1 - 8/\bar{a}^2)^{\frac{1}{2}} = -3.2646, \quad r_3(\bar{a}) = r_2(\bar{a}) = -3.$$

$-\frac{1}{2} - \frac{\bar{a}^2}{8} + \frac{\bar{a}^2}{8}(1 - 8/\bar{a}^2)^{\frac{1}{2}} = -1.1104$. Luego (iv) se satisface por continuidad para $|\bar{a}^2 - (27/2)|$ suficientemente pequeño.

QED

Procedemos ahora a analizar la estructura del conjunto de soluciones en el entorno de cada punto de la tabla anterior. Recordemos que las ecuaciones para $\xi = 0$ son:

$$F_1 = rY_1 - \bar{a}Y_1^2 - \bar{a}Y_2^2 - 3Y_1Y_2^2 - Y_1^3 + s^{-3/2}R_1(s^{\frac{1}{2}}Y, rs, 0) = 0$$

$$F_2 = (r-1)Y_2 - 2\bar{a}Y_1Y_2 - 3Y_1^2Y_2 - Y_2^3 + s^{-3/2}R_2(s^{\frac{1}{2}}Y, rs, 0) = 0$$

VII.2.1 $r^0 = 0$

Por el Teorema de la Función Implícita, la única solución de $F_2 = 0$ en el entorno de $r^0 = 0$, $Y_1^0 = 0$, $Y_2^0 = 0$ es $Y_2 \equiv 0$. Sustituyendo en la primera ecuación definimos

$$\tilde{F}_1(Y_1, r, s, a, \xi) = rY_1 - \bar{a}Y_1^2 - Y_1^3 - s^{-3/2}R_1(s^{\frac{1}{2}}Y, rs, \xi).$$

Recordando que $R_1 = 0$ cuando $Y_2 = 0$, las soluciones de $\tilde{F}_1 = 0$ son $Y_1 = 0$ y $r = \bar{a}Y_1 + Y_1^2$. De nuevo, esta rama corresponde a las soluciones constantes de $-\Delta u = \lambda u - au^2 - u^3$.

$\bar{a} < 0$

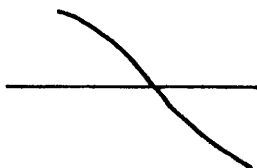


Figura n° 17

$\bar{a} > 0$

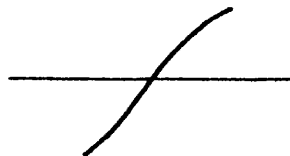


Figura n° 18

VII.2.2 $r^0 = 1$

Este caso es el mismo que vimos en el capítulo anterior, en cuya nota final concluimos que, para $p=2$, el tipo de bifurcación se mantiene ante perturbaciones cúbicas positivas. Tenemos, pues, una bifurcación supercrítica del tipo "tridente".

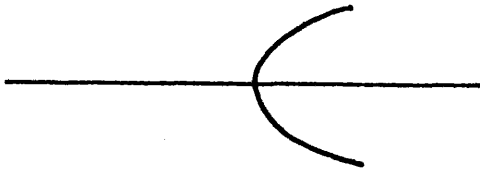


Figura nº 19

VII.2.3 $r^0 = -\bar{a}^2/4$

Los valores correspondientes de Y son $Y_1^0 = -\bar{a}/2$, $Y_2^0 = 0$.

Como en VII.2.1, podemos aplicar el Teorema de la Función Implícita a la ecuación $F_2 = 0$, obteniendo $Y_2 = 0$ como solución única. Nuevamente definimos

$$\tilde{F}_1(Y_1, r, s, \bar{a}, \epsilon) = F_1(Y_1, 0, r, s, \bar{a}, \epsilon) = rY_1 - \bar{a}Y_1^2 - Y_1^3.$$

cuya solución es la función $r(Y_1) = \bar{a}Y_1 + Y_1^2$. El punto de bifurcación corresponde al mínimo de esta función, por lo cual se trata de un "punto de retorno".



Figura nº 20

VII.2.4 $r^0 = r_i(\bar{a})$

En este caso, $Y_1^0 = \bar{a}v_i(\bar{a})$, $Y_2^0 = \bar{a}b_i(\bar{a})$.

$$D_{Y_2} F_2(Y^0, r^0, 0, \bar{a}, 0) = r^0 - 1 - 2\bar{a}Y_1^0 - 3(Y_1^0)^2 - 3(Y_2^0)^2 \neq 0,$$

pues si fuese $= 0$, $\Delta = 0$ implicaría $-2\bar{a}Y_1^0 - 6\bar{a}Y_1^0Y_2^0 = 0$,

y entonces $Y_1^0 = -\bar{a}/3$, lo cual es imposible, pues $v_i(\bar{a}) \neq -1/3$.

Por tanto, podemos aplicar el Teorema de la Función Implícita, obteniendo una única solución $Y_2 = Y_2(Y_1, r, s, \bar{a}, \epsilon)$ en un entorno de $(Y^0, r^0, 0, \bar{a}, 0)$ tal que $Y_2(Y_1^0, r^0, 0, \bar{a}, 0) = Y_2^0$. Además, $Y_2(Y_1, r, 0, \bar{a}, 0)^2 = r - 1 - 3\bar{a}Y_1 - 3Y_1^2$; esto se deduce directamente de dividir $F_2 = 0$ por $Y_2 \neq 0$.

Definimos

$$\tilde{F}_1(Y_1, r, s, \bar{a}, \epsilon) = F_1(Y_1, Y_2(Y_1, r, s, \bar{a}, \epsilon), r, s, \bar{a}, \epsilon).$$

Para $s = 0$, $\epsilon = 0$ tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1(Y_1, r, 0, \bar{a}, 0) &= rY_1 - \bar{a}Y_1^2 - \bar{a}Y_2^2 - 3Y_1Y_2^2 - Y_1^3 = \\ &= rY_1 - \bar{a}Y_1^2 - (\bar{a} + 3Y_1)Y_2^2 - Y_1^3 \\ &= rY_1 - \bar{a}Y_1^2 - (\bar{a} + 3Y_1)(r - 1 - 2\bar{a}Y_1 - 3Y_1^2) - Y_1^3 \\ &= \bar{a}(1-r) + (3-2r+2\bar{a}^2)Y_1 + 8\bar{a}Y_1^2 + 8Y_1^3. \end{aligned}$$

Por lo tanto, en el punto $(Y_1^0, r^0, 0, \bar{a}, 0)$ se tiene

$$\tilde{F}_1 = 0; \quad D_r \tilde{F}_1 = -\bar{a} - 2Y_1^0; \quad D_{Y_1} \tilde{F}_1 = 0;$$

$$D_{Y_1}^2 \tilde{F}_1 = 16\bar{a} + 48Y_1^0 = 16\bar{a}(1 + 3v_1(\bar{a})). \text{ Pero}$$

$$-\bar{a} - 2Y_1^0 = -\bar{a} - 2\bar{a}v_1(\bar{a}) = -\bar{a}(1 + 2v_1(\bar{a})) \neq 0, \text{ ya que}$$

$$v_1(\bar{a}) \neq -1/2 \text{ si } \bar{a} \neq 0.$$

Como $D_r \tilde{F}_1 \neq 0$, podemos aplicar el Teorema de la Función Implícita, obteniendo una única función $r = r(Y_1, s, \bar{a}, \epsilon)$ en el entorno de $(r^0, Y_1^0, 0, \bar{a}, 0)$. Esta función satisface

$$D_{Y_1} r(Y_1^0, 0, \bar{a}, 0) = 0$$

$$D_{Y_1}^2 r(Y_1^0, 0, \bar{a}, 0) = \frac{16\bar{a}(1 + 3v_1(\bar{a}))}{\bar{a}(1 + 2v_1(\bar{a}))} = \begin{cases} > 0 & \text{para } i = 1, 3 \\ < 0 & \text{para } i = 2. \end{cases}$$

En cualquier caso, podemos aplicar de nuevo el Teorema de la Función Implícita, hallando $Y_1 = Y_1(s, \bar{a}, \epsilon)$ tal que $D_{Y_1} r(Y_1(s, \bar{a}, \epsilon), s, \bar{a}, \epsilon) = 0$, $D_{Y_1}^2 r(Y_1(s, \bar{a}, \epsilon), s, \bar{a}, \epsilon) \neq 0$

(para s, ϵ suficientemente pequeños). Si definimos

$\bar{r}(s, \bar{a}, \epsilon) = r(Y_1(s, \bar{a}, \epsilon), s, \bar{a}, \epsilon)$, vemos que $\bar{r}(s, \bar{a}, \epsilon)$ es un punto de retorno, subcrítico para $i = 2$ y supercrítico para $i = 1, 3$.

$$\text{VII.2.5} \quad r^0 = -\frac{1}{2} - \frac{\bar{a}^2}{8} \pm \frac{1}{8}\bar{a}(\bar{a}^2-8)^{\frac{1}{2}}$$

El valor correspondiente de Y^0 es

$$Y_1^0 = -\frac{\bar{a}}{4} \pm \frac{1}{4}(\bar{a}^2-8)^{\frac{1}{2}}, \quad Y_2^0 = 0. \text{ Tenemos: } F_1(Y^0, r^0, 0, \bar{a}, 0) = 0,$$

$$D_{Y_1} F_1(Y^0, r^0, 0, \bar{a}, 0) = r^0 - 2\bar{a}Y_1^0 - 3(Y_1^0)^2 = 1.$$

Aplicando el Teorema de la Función Implícita, obtenemos $Y_1 = Y_1(Y_2, r, s, \bar{a}, \epsilon)$, y esta función es par en Y_2 , por los resultados del Capítulo VI. En $(Y_1^0, 0, r^0, \bar{a}, 0)$ tenemos

$$D_{Y_2} F_1 = 0; \quad D_{Y_2}^2 F_1 = -2\bar{a} - 6Y_1^0; \quad D_r F_1 = Y_1^0; \quad D_r Y_1 = -Y_1^0;$$

$$D_{Y_2} Y_1 = 0; \quad D_{Y_2}^2 Y_1 = 2\bar{a} + 6Y_1^0.$$

La función

$$\tilde{F}_2(Y_2, r, s, \bar{a}, \epsilon) \stackrel{\text{def}}{=} F_2(Y_1(Y_2, r, s, \bar{a}, \epsilon), Y_2, r, s, \bar{a}, \epsilon)$$

es impar en Y_2 ; por tanto, podemos escribir

$$\tilde{F}_2(Y_2, r, s, \bar{a}, \epsilon) = Y_2 \tilde{f}_2(Y_2, r, s, \bar{a}, \epsilon)$$

donde \tilde{f}_2 es diferenciable (excepto en ϵ) y par en Y_2 , y para $s=0$, $\epsilon=0$ toma la siguiente forma:

$$\tilde{f}_2(Y_2, r, 0, \bar{a}, 0) = r - 1 - 2\bar{a}Y_1 - 3Y_1^2 - Y_2^2.$$

En el punto $(Y^0, r^0, 0, \bar{a}, 0)$ se verifica

$$D_r \tilde{f}_2 = 1 - 2\bar{a}D_r Y_1 - 6Y_1 D_r Y_1 = 1 - (2\bar{a} + 6Y_1^0)(-Y_1^0) =$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 + \bar{a}Y_1^0 + 2(Y_1^0)^2 + \bar{a}Y_1^0 + 4(Y_1^0)^2 = \bar{a}Y_1^0 + 4(Y_1^0)^2 = \\
 &= Y_1^0(\bar{a} + 4Y_1^0) \neq 0, \text{ pues } Y_1^0 \neq 0, Y_1^0 \neq -\bar{a}/4. \text{ (Hemos utili-} \\
 &\text{zado la fórmula que define } Y_1^0: 1 + \bar{a}Y_1^0 + 2(Y_1^0)^2 = 0.)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{Y_2} \tilde{f}_2 &= 0; \quad D_{Y_2}^2 \tilde{f}_2 = -2\bar{a}D_{Y_2}^2 Y_1 - 6Y_1 D_{Y_2}^2 Y_1 - 2 = \\
 &= -(2\bar{a} + 6Y_1^0)D_{Y_2}^2 Y_1 - 2 = -(2\bar{a} + 6Y_1^0)(2\bar{a} + 6Y_1^0) - 2.
 \end{aligned}$$

Como $D_{Y_2} \tilde{f}_2 \neq 0$, obtenemos una función $r(Y_2, s, \bar{a}, \epsilon)$,

par en Y_2 (por lo cual $D_{Y_2} r = 0$), y

$$D_{Y_2}^2 r = -(D_{Y_2} \tilde{f}_2)^{-1} D_{Y_2}^2 \tilde{f}_2 = \frac{2 + (2\bar{a} + 6Y_1^0)^2}{Y_1^0(\bar{a} + 4Y_1^0)}.$$

- 1) Si $Y_1^0 = \frac{1}{4}(-\bar{a} + (\bar{a}^2 - 8)^{\frac{1}{2}})$, entonces $Y_1^0 < 0$ y $\bar{a} + 4Y_1^0 > 0$.

Por tanto, $D_{Y_2}^2 r < 0$, y la bifurcación en $r(0, s, \bar{a}, \epsilon)$

es subcrítica. Esto corresponde a la bifurcación secundaria que encontramos en el caso $g = \text{par}$, que, como apuntamos anteriormente, permanece ante perturbaciones de orden superior.

- 2) Si $Y_1^0 = \frac{1}{4}(-\bar{a} - (\bar{a}^2 - 8)^{\frac{1}{2}})$, entonces $Y_1^0 < 0$ y $\bar{a} + 4Y_1^0 < 0$.

Por tanto, $D_{Y_2}^2 r > 0$, y la bifurcación es supercrítica.

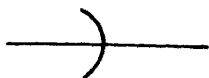


Figura n° 21

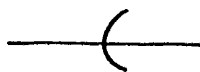


Figura n° 22

VII.2.6 El diagrama de bifurcación completo

Reuniendo toda la información obtenida en esta sección podemos construir las curvas de bifurcación en el plano (λ, s) para distintos valores de \bar{a} , y describir la estructura del conjunto de soluciones para s (es decir, ε) y a fijos, en función de λ .

1) $\bar{a}^2 < 8$,

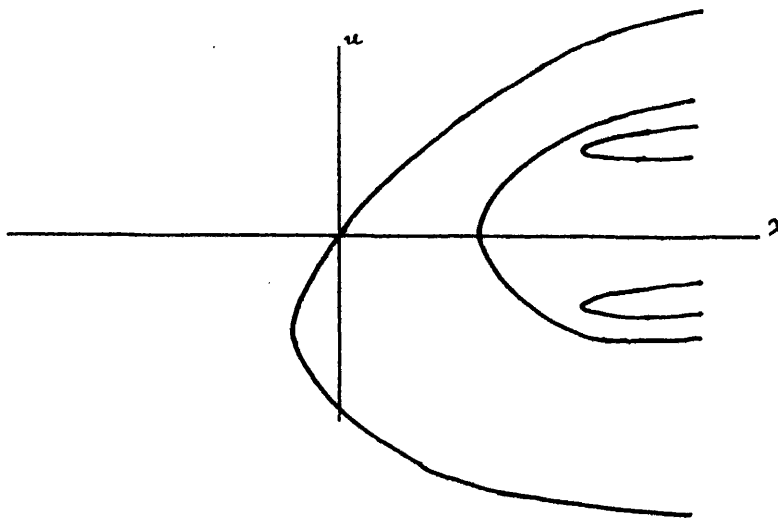
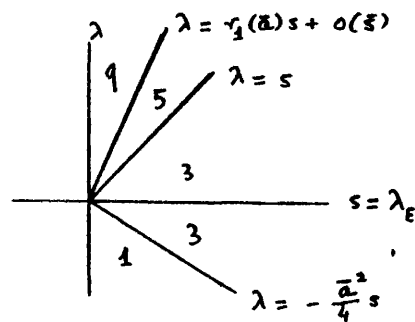


Figura n° 23

2) $8 < \bar{a}^2 < 27/2$

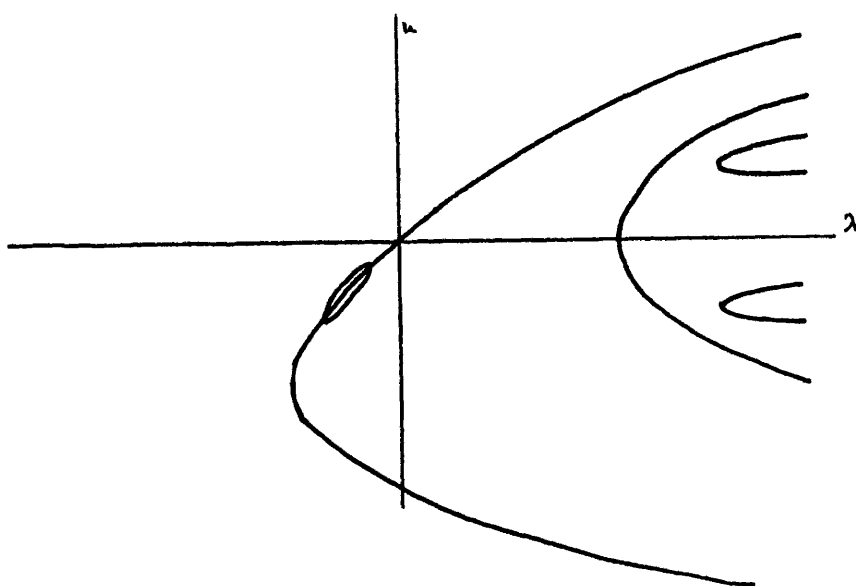
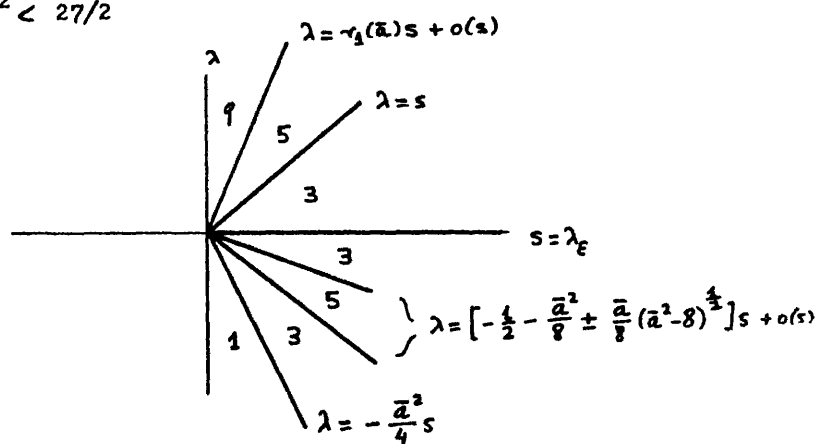


Figura n° 24

3) $\bar{a}^2 > 27/2$

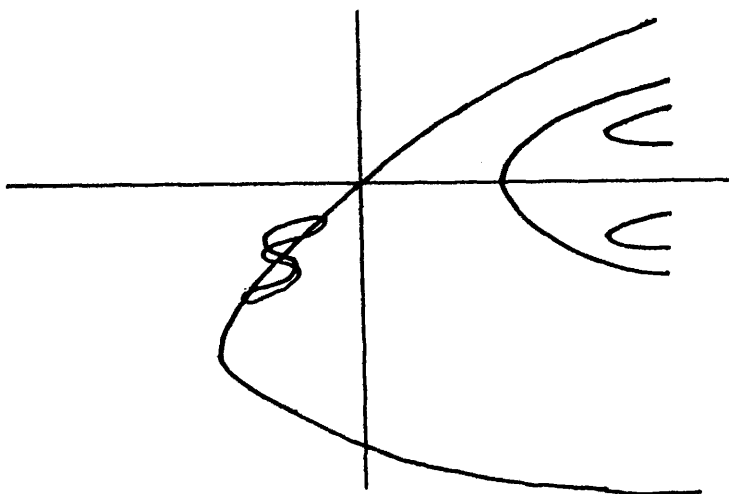
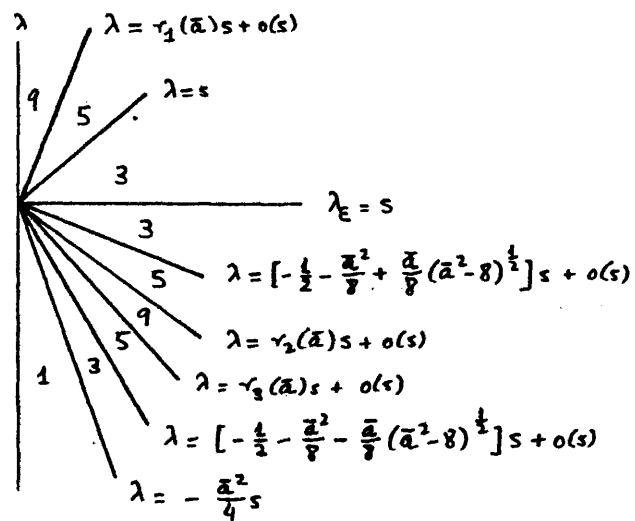


Figura nº 25

VII.2 Eliminación de a

El cambio de variable que vamos a efectuar es el más importante a la hora de analizar los cambios en la estructura del conjunto de soluciones cuando la función $f(\lambda, u)$ permanece fija y $s (= \lambda_\varepsilon)$, es decir, el dominio) cambia.

Definimos nuevas variables $\bar{\lambda}$, \bar{s} , \bar{x} :

$$(3.1) \quad \lambda = a^2 \bar{\lambda} ; \quad s = a^2 \bar{s} ; \quad x = a \bar{x} .$$

La ecuación (0.1) se transforma en

$$\bar{\lambda} L_1(\varepsilon) \bar{x} + \bar{s} L_2(\varepsilon) \bar{x} + Q(\bar{x}, \varepsilon) + C(\bar{x}, \varepsilon) + a^{-3} R(a \bar{x}, a^2 \bar{\lambda}, \varepsilon) = 0 .$$

Esta vez no necesitamos considerar todos los valores de $\bar{\lambda}$, \bar{s} , ya que los casos $\bar{\lambda} \neq 0$, $\bar{s} \neq 0$ han sido discutidos previamente (Sección VII.1). Nos queda analizar el comportamiento de las soluciones en el entorno de $\bar{s} = 0$, es decir, cuando $a^2/s \rightarrow \infty$.

Los posibles puntos de bifurcación en el entorno de $\bar{s} = 0$ son las soluciones de

$$(3.2) \quad \begin{cases} \bar{\lambda} \bar{x} + Q(\bar{x}, 0) + C(\bar{x}, 0) = 0 \\ \det (\bar{\lambda} I + D_{\bar{x}} Q(\bar{x}, 0) + D_{\bar{x}} C(\bar{x}, 0)) = 0 \end{cases}$$

ó, en términos de $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ ($\bar{x} = (\bar{\alpha}, \bar{\beta})$),

$$\begin{cases} \bar{\lambda}\bar{\alpha} - \bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2 - 3\bar{\alpha}\bar{\beta}^2 - \bar{\alpha}^3 = 0 \\ \bar{\lambda}\bar{\beta} - 2\bar{\alpha}\bar{\beta} - 3\bar{\alpha}^2\bar{\beta} - \bar{\beta}^3 = 0 \\ \Delta = \begin{vmatrix} \bar{\lambda} - 2\bar{\alpha} - 3\bar{\alpha}^2 - 3\bar{\beta}^2 & -2\bar{\beta} - 6\bar{\alpha}\bar{\beta} \\ -2\bar{\beta} - 6\bar{\alpha}\bar{\beta} & \bar{\lambda} - 2\bar{\alpha} - 3\bar{\alpha}^2 - 3\bar{\beta}^2 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

Definamos:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \bar{\alpha} + \bar{\beta} &= z_1 & z_1 &= \frac{1}{2}(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) \\ \bar{\alpha} - \bar{\beta} &= z_2 & z_2 &= \frac{1}{2}(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) \end{aligned}$$

Entonces, (3.3) se transforma en

$$(3.5) \quad \begin{cases} \bar{\lambda}z_1 - z_1^2 - z_1^3 = 0 \\ \bar{\lambda}z_2 - z_2^2 - z_2^3 = 0 \\ \Delta = (\bar{\lambda} - 2z_1 - 3z_1^2)(\bar{\lambda} - 2z_2 - 3z_2^2) = 0. \end{cases}$$

Calculemos las soluciones de (3.5):

- 1) $z_1 = 0, z_2 = 0$. Entonces $\bar{\lambda} = 0$.
- 2) $z_1 = 0, z_2 \neq 0$. Entonces $\bar{\lambda} - z_2 - z_2^2 = 0, \bar{\lambda} - 2z_2 - 3z_2^2 = 0$
implican $2z_2^2 + z_2 = 0$; por tanto, $z_2 = -\frac{1}{2}, \bar{\lambda} = -\frac{1}{4}$, y
 $\bar{\lambda} - z_2 - z_2^2 = 0, \bar{\lambda} = 0$ implican $z_2 = -1, \bar{\lambda} = 0$.
- 3) $z_1 \neq 0, z_2 = 0$. Debido a la simetría de las ecuaciones, encontramos los mismos valores de (2), cambiando z_1 por z_2 .
- 4) $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$. Entonces, $\bar{\lambda} = z_1 + z_1^2 = z_2 + z_2^2$,
 $\Delta = (-z_1 - 2z_1^2)(-z_2 - 2z_2^2) = z_1z_2(1 + 2z_1)(1 + 2z_2)$; por tanto,

$z_1 = -\frac{1}{2}$, $\bar{\lambda} = -\frac{1}{4}$, $z_2^2 + z_2 = -\frac{1}{4}$, lo que implica $z_2 = -\frac{1}{2}$.

En síntesis, las soluciones de (3.5) son

$\bar{\lambda}$	z_1	z_2	$\bar{\lambda}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\beta}$
0	0	0	0	0	0
0	0	-1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	-1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0

Nuestro objetivo es obtener las curvas de bifurcación $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_j(\bar{s}, \epsilon)$ para a fijo. Una vez obtenidas las curvas, podemos utilizar los resultados de la sección anterior para decidir la estructura local de cada bifurcación.

VII.3.1 $\bar{\lambda}^0 = 0, z^0 = 0$

Este es precisamente el problema que tratamos en el Capítulo VI, para g par. Como vimos, cuando el primer término no nulo de g es cuadrático, las curvas de bifurcación se mantienen ante perturbaciones de orden superior. Podemos, pues, concluir que hay tres curvas de bifurcación

$$\bar{\lambda} = \bar{s}; \quad \bar{\lambda} = 0; \quad \bar{\lambda} = -\bar{s} + o(\bar{s})$$

Estas curvas corresponden a las soluciones "muy pequeñas" de (0.1), es decir, las soluciones que satisfacen la acotación a priori $|X| \leq M[|\bar{\lambda}| + |\bar{\epsilon}|]$, de forma que el término cuadrático es dominante.

VII.3.2 $\bar{\lambda}^0 = 0, z_1^0 = 0, z_2^0 = -1$

Si definimos $t = \bar{\lambda} - \frac{1}{2}\bar{\epsilon}$, para $\epsilon = 0$ (0.1) se convierte en

$$(3.6) \begin{cases} \Phi_1 \equiv tz_1 + \frac{1}{2}\bar{\epsilon}z_2 - z_1^2 - z_1^3 + \dots = 0 \\ \Phi_2 \equiv \frac{1}{2}\bar{\epsilon}z_1 + tz_2 - z_2^2 - z_2^3 + \dots = 0 \\ \Delta \equiv (t-2z_1-3z_1^2)(t-2z_2-3z_2^2) - \frac{1}{2}t^2 + \dots = 0 \end{cases}$$

Entonces,
$$\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Delta)}{\partial(t, z_1, z_2, \bar{\epsilon})} =$$

$$= \begin{pmatrix} z_1 & t-2z_1-3z_1^2 & \frac{1}{2}\bar{\epsilon} & \frac{1}{2}z_2 \\ z_2 & \frac{1}{2}\bar{\epsilon} & t-2z_2-3z_2^2 & \frac{1}{2}z_1 \\ A & B & C & -\frac{1}{2}\bar{\epsilon} \end{pmatrix}$$

donde $A = 2t - 2(z_1 + z_2) - 3(z_1^2 + z_2^2)$

$B = -(2+6z_1)(t-2z_2-3z_2^2)$

$C = -(2+6z_2)(t-2z_1-3z_1^2)$

Para $t=0, z_1=0, z_2=-1, \bar{\epsilon}=0$ tenemos

$$\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Delta)}{\partial(t, Z_1, Z_2, \bar{s})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por el Teorema de la Función Implícita existe una solución única

$$Z_1 = Z_1(t, a, \epsilon) ; \quad Z_2 = Z_2(t, a, \epsilon) ; \quad \bar{s} = \bar{s}(t, a, \epsilon) .$$

Para $t=0$, $Z_1=0$, $Z_2=-1$, estas funciones cumplen

$$D_t \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \bar{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como $D_t \bar{s} = 0$, necesitamos calcular los términos de segundo orden en t . Por la estructura especial de estas ecuaciones, se ve que podemos obtener $D_t^2 \bar{s}$ directamente

a partir de la primera ecuación, es decir, $\Phi_1 = 0$, por diferenciación implícita:

$$Z_1 + t D_t Z_1 + \frac{1}{2} Z_2 D_t \bar{s} + \frac{1}{2} \bar{s} D_t Z_2 - 2 Z_1 D_t Z_1 - 3 Z_1^2 D_t Z_1 = 0.$$

Volviendo a derivar y aplicando $Z_1=0$, $\bar{s}=0$, $t=0$, $D_t \bar{s}=0$,

$$\text{obtenemos} \quad 2 D_t Z_1 + \left(\frac{1}{2} D_t^2 \bar{s} \right) Z_2 - 2 (D_t Z_1)^2 = 0.$$

Como $D_t Z_1 = \frac{1}{2}$ y $Z_2 = -1$, concluimos finalmente

$$D_t^2 \bar{s}(0,0,0) = 1. \text{ Por tanto, } \bar{s} = \frac{1}{2} t^2 + o(t^2).$$

Recordando que $t = \bar{\lambda} - \frac{1}{2}\bar{s}$, encontramos que

$$\bar{\lambda} = (2\bar{s})^{\frac{1}{2}} + o(\bar{s}^{\frac{1}{2}})$$

$$\bar{\lambda} = -(2\bar{s})^{\frac{1}{2}} + o(\bar{s}^{\frac{1}{2}})$$

son las curvas de bifurcación.

El caso $\bar{\lambda}^0 = 0$, $z_1^0 = -1$, $z_2^0 = 0$ nos da exactamente las mismas curvas de bifurcación, debido a las simetrías de las ecuaciones.

VII.3.3 $\bar{\lambda}^0 = -\frac{1}{2}$, $z_1^0 = 0$, $z_2^0 = -\frac{1}{2}$

En este caso tenemos

$$\frac{\partial(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \Delta)}{\partial(t, z_1, z_2, \bar{s})} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Por el Teorema de la Función Implícita, la solución es $t = t(\bar{s}, a, \epsilon)$, $z_1 = z_1(\bar{s}, a, \epsilon)$, $z_2 = z_2(\bar{s}, a, \epsilon)$, y

$D_{\bar{s}} t(0, 0, 0) = 0$. Por lo tanto, $t = -\frac{1}{2} + o(\bar{s})$; es decir:

$$\bar{\lambda} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\bar{s} + o(\bar{s}).$$

Como antes, obtenemos la misma curva en el caso complementario $\bar{\lambda}^0 = -\frac{1}{2}$, $z_1^0 = -\frac{1}{2}$, $z_2^0 = 0$.

VII.3.4 $\bar{\lambda}^0 = -\frac{1}{2}, \bar{z}_1^0 = -\frac{1}{2}, \bar{z}_2^0 = -\frac{1}{2}$

En este caso la matriz $\frac{\partial(\bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_2, \Delta)}{\partial(t, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{s})}$ tiene

rango 2. Por ello, trabajaremos directamente con las ecuaciones $\bar{\Phi}_1 = 0, \bar{\Phi}_2 = 0$; parece también más indicado volver a las variables originales $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\lambda}$, ya que $\bar{\alpha}^0 = 0$.

Necesitamos el desarrollo de Taylor de F_1, F_2

alrededor del punto $\bar{\lambda} = -\frac{1}{2}, \bar{\alpha} = -\frac{1}{2}, \bar{\beta} = 0$. Sean

$\bar{\lambda} = -\frac{1}{2} + \lambda', \bar{\alpha} = -\frac{1}{2} + \alpha', \bar{\beta} = \beta'$. Entonces, si definimos

$\Psi_i(\alpha', \beta', \lambda', \bar{s}, a, \epsilon) \stackrel{\text{def}}{=} F_i(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\lambda}, \bar{s}, a, \epsilon) \quad (i=1,2)$, tenemos:

$$\Psi_1(\alpha', \beta', \lambda', \bar{s}, 0, 0) = (-\frac{1}{2} + \lambda')(-\frac{1}{2} + \alpha') - (-\frac{1}{2} + \alpha')^2 - \beta'^2 -$$

$$- 3(-\frac{1}{2} + \alpha')\beta'^2 - (-\frac{1}{2} + \alpha')^3 =$$

$$= -\frac{1}{2}\lambda' + \lambda'\alpha' + \frac{1}{2}\alpha'^2 + \frac{1}{2}\beta'^2 - 3\alpha'\beta'^2 - \alpha'^3.$$

$$\Psi_2(\alpha', \beta', \lambda', \bar{s}, 0, 0) = (-\frac{1}{2} + \lambda')\beta' - \bar{s}\beta' - 2(-\frac{1}{2} + \alpha')\beta' -$$

$$- 3(-\frac{1}{2} + \alpha')^2\beta' - \beta'^3 =$$

$$= \lambda'\beta' - \bar{s}\beta' + \alpha'\beta' - 3\alpha'^2\beta' - \beta'^3.$$

$$\Delta \equiv \det \frac{\partial(\Psi_1, \Psi_2)}{\partial(\alpha', \beta')} = \begin{vmatrix} \lambda' + \alpha' + 3\alpha'^2 - 3\beta'^2 & \beta' - 6\alpha'\beta' \\ \beta' - 6\alpha'\beta' & \lambda' - \bar{s} + \alpha' - 3\alpha'^2 - 3\beta'^2 \end{vmatrix}.$$

Sabemos que $\Psi_2(\alpha', 0, \lambda', \bar{s}, a, \epsilon) = 0$, ya que la segunda ecuación de bifurcación satisface $H(\alpha, 0, \lambda, \epsilon) = 0$. Por lo tanto, consideraremos primero la solución $\beta' = 0$ de $\Psi_2 = 0$; sustituyendo en $\Psi_1 = 0$, obtenemos

$$-\frac{1}{2}\lambda' + \lambda'\alpha' + \frac{1}{2}\alpha'^2 - \alpha'^3 = 0$$

En las variables originales, esto corresponde a $\lambda\alpha - a\alpha^2 - \alpha^3 = 0$. El valor de bifurcación es $\lambda = -\frac{1}{2}a^2$, que representa el punto de retorno de la rama de soluciones constantes de $-u = \lambda u - au^2 - u^3$.

Una vez considerado el caso $\beta' = 0$, podemos dividir la ecuación $\Psi_2 = 0$ por β' , obteniendo:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\lambda' + \lambda'\alpha' + \frac{1}{2}\alpha'^2 + \frac{1}{2}\beta'^2 - 3\alpha'\beta'^2 - \alpha'^3 = 0 \\ \lambda' - \bar{s} + \alpha' - 3\alpha'^2 - \beta'^2 = 0 \\ \Delta = \begin{vmatrix} \lambda' + \alpha' - 3\alpha'^2 - 3\beta'^2 & \beta' - 6\alpha'\beta' \\ 1 - 6\alpha' & -2\beta' \end{vmatrix} = -\beta' + \dots = 0 \end{cases}$$

Por el Teorema de la Función Implícita, la solución es $\lambda' = \lambda'(\bar{s}, a, \epsilon)$, $\alpha' = \alpha'(\bar{s}, a, \epsilon)$, $\beta' = \beta'(\bar{s}, a, \epsilon)$. Por derivación implícita, es fácil ver que $D_{\bar{s}}\lambda' = 0$; derivando de nuevo, tenemos $-\frac{1}{2}D_{\bar{s}}^2\lambda' + (D_{\bar{s}}\alpha')^2 + (D_{\bar{s}}\beta')^2 = 0$.

A partir de la segunda ecuación, $D_{\bar{s}}\alpha' = 1$, y de $\Delta = 0$ concluimos $D_{\bar{s}}\beta' = 0$. Por lo tanto, $D_{\bar{s}}^2\lambda' = 2$, y la

curva de bifurcación es

$$\bar{\lambda} = -\frac{1}{4} + 2\bar{s}^2 + o(\bar{s}^2).$$

VII.3.5 El diagrama de bifurcación completo

La información recogida nos permite construir las curvas de bifurcación:

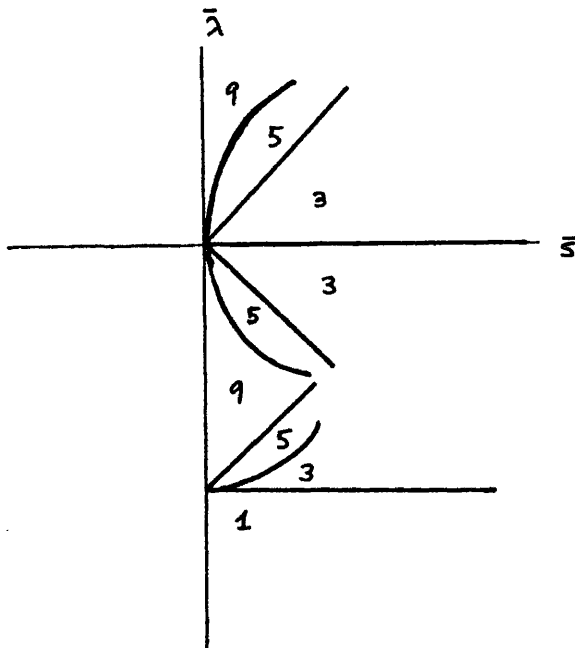


Figura n° 26

VII.4 Eliminación de λ

Sólo nos queda eliminar λ ; para ello, efectuamos el siguiente cambio de variables:

$$x = \bar{x}|\lambda|^{\frac{1}{2}} ; \quad s = \bar{s}|\lambda| ; \quad a = \bar{a}|\lambda|^{\frac{1}{2}} .$$

La ecuación (0.1) se transforma en

$$\pm L_1(\epsilon)\bar{x} + \bar{s}L_2(\epsilon)\bar{x} + \bar{a}Q(\bar{x}, \epsilon) + C(\bar{x}, \epsilon) + |\lambda|^{3/2}R(|\lambda|^{\frac{1}{2}}\bar{x}, \lambda, \epsilon) = 0 .$$

Tenemos que estudiar esta ecuación en el entorno de $\bar{s}=0$, $\bar{a}=0$, pues los demás casos ya han sido analizados. Ahora bien, es fácil ver que, cuando $\bar{a}=0$, esta ecuación es la misma que estudiamos en el Capítulo VI para g impar, y demostramos allí que $\pm L_1(0)\bar{x} + C(\bar{x}, 0) = 0$ implica $\det(\pm L_1(0) + D_{\bar{x}}C(\bar{x}, 0)) \neq 0$.

Por lo tanto, no hay bifurcaciones para \bar{a} , \bar{s} suficientemente pequeños.

VII.5 Estabilidad de las soluciones

Discutiremos brevemente en esta sección la estabilidad de las distintas ramas de soluciones que hemos encontrado. Por simplicidad, analizaremos únicamente el ejemplo $g(u) = au^2 + u^3$, ya que contiene toda la información necesaria para deducir los resultados correspondientes a $g(u) = u^2$ y $g(u) = u^3$. Para identificar las ramas de soluciones, consideraremos solamente el diagrama de soluciones correspon-

diente a a, s fijos, λ variable; el análisis de los diagramas de soluciones para λ, a fijos, s variable y s, λ fijos, a variable serían idénticos, con la salvedad de que, en el caso de $s = \lambda_\varepsilon$ variable, hemos de utilizar la propiedad de continuidad del espectro ante perturbaciones en ε (Lema V.3.1).

En la figura siguiente, los números que aparecen en los puntos de bifurcación representan el autovalor dominante (es decir, el mayor) de la ecuación linealizada alrededor de tal punto. Si este autovalor es λ_ε , sabemos que todas las ramas que concurran en dicho punto han de

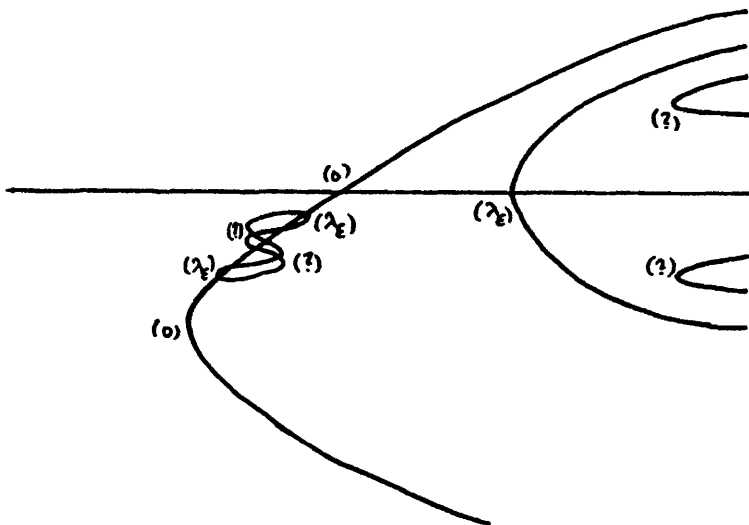
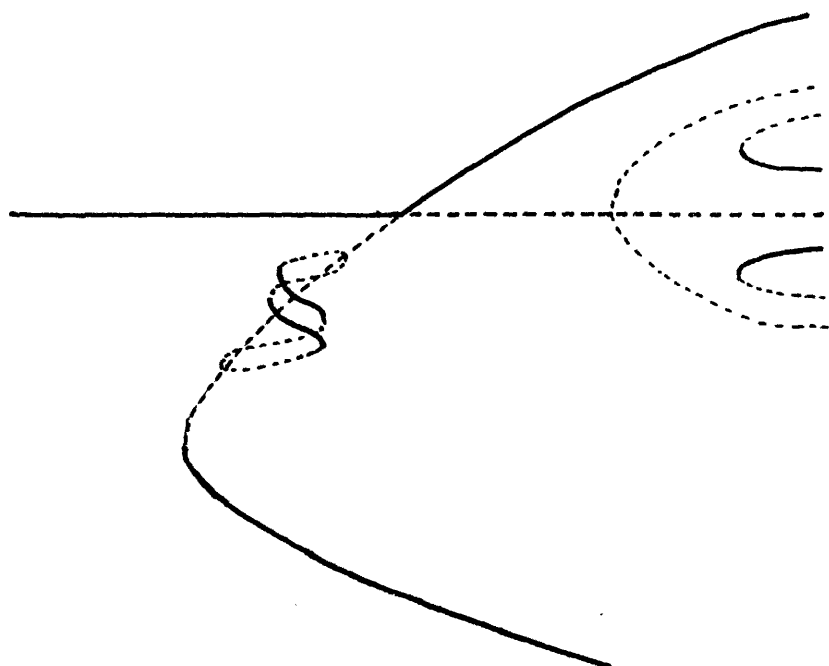


Figura nº 27

ser inestables (en el entorno del punto). También sabemos que, en este problema, todo cambio de estabilidad (todo posible punto de bifurcación) ha resultado ser, de hecho, un punto de bifurcación (bifurcación primaria, secundaria o punto de retorno); esto significa que una rama continua de soluciones no puede sufrir cambio en su estabilidad a no ser que origine una nueva rama de bifurcación (o dé la vuelta sobre sí misma).

Estas consideraciones nos permiten decidir la estabilidad de todas las ramas del diagrama anterior, excepto aquellas que inciden en un punto afectado del símbolo "?". En vez de proceder a un detallado análisis de dichos puntos, podemos argumentar como sigue:

Demostramos en la Proposición V.3.2 que si λ, a son tales que $\lambda u - au^2 - u^3$ tiene sólo raíces simples, entonces, para ε suficientemente pequeño, las soluciones correspondientes a ε pequeño comparten las propiedades de estabilidad con sus valores límite cuando $\varepsilon = 0$. Si $\lambda > -\frac{1}{4}a^2$, hay exactamente nueve soluciones ($\varepsilon = 0$), cuatro de las cuales son estables y cinco inestables. Por lo tanto, en las partes del diagrama que contengan nueve soluciones, debemos tener la misma distribución: cuatro estables y cinco inestables. Este hecho, combinado con los análisis precedentes, nos permite completar la figura:



— , estable
- - - , inestable

Figura nº 28

CAPITULO VIII

APLICACION A UN MODELO DE SELECCION GENETICA CON MIGRACION

La ecuación de reacción-difusión que hemos considerado en los capítulos precedentes aparece de forma natural en muchas situaciones reales. En este capítulo nos fijaremos exclusivamente en el llamado modelo de selección-migración en Genética de poblaciones. A partir del trabajo pionero de Fisher en 1937, muchos autores han estudiado los efectos combinados de los procesos de selección natural y migración con la idea de entender el mecanismo de la evolución genética en grandes poblaciones.

Consideremos una isla, representada por un dominio bidimensional Ω , habitada por una población numerosa, distribuida uniformemente en Ω , y cuyo tamaño se encuentra próximo al nivel de saturación, por lo cual puede considerarse constante con el paso del tiempo.

Nos fijaremos en cierta característica genética de la población, que supondremos regida por la combinación de dos alelos A y a . De esta forma, la población se halla dividida en tres posibles genotipos: aa , aA y AA . Supondremos que los demás aspectos genéticos de la población no interfieren con éste, que machos y hembras tienen las mis-

mas frecuencias de distribución de genes, el apareamiento es aleatorio (independiente del genotipo) y la población se desplaza dentro de la isla con cierta tasa de difusión r independiente del tiempo y de forma isótropa.

Representemos por τ_1, τ_2, τ_3 las tasas de mortalidad de los genotipos aa, aA y AA , respectivamente. Estas cantidades pueden depender de x , es decir, ser distintas en distintas regiones de la isla; se han estudiado algunos casos en esta dirección, cuando Ω es unidimensional; ver Fleming [12], Nagylaki [24], etc.

Nosotros supondremos que dichas tasas no dependen de x ni del tiempo. En este caso, puede demostrarse (ver, por ejemplo, Fife [11], Ewens [10], Hoppensteadt [19]; esta presentación está tomada de Aronson y Weinberger [5]) que la frecuencia del gene A en la población viene dada por:

$$(1) \quad \frac{\partial p}{\partial t} = r\Delta p + p(1-p)((\tau_1 - \tau_2)(1-p) - (\tau_3 - \tau_2)p) \quad \text{en } \Omega$$

con la condición de contorno $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ en $\partial\Omega$, pues se trata de una isla sin contacto con el exterior. Una discusión de la relevancia de esta condición de contorno aparece en Fleming y Su [13].

Si $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3$, no hay selección natural, y (1) es precisamente la ecuación de Fisher.

$\tau_1 \leq \tau_2 < \tau_3$ ó $\tau_3 \leq \tau_2 < \tau_1$ representa el caso llamado heterozigoto intermedio:

Si $\tau_2 < \tau_1 \leq \tau_3$ ó $\tau_2 < \tau_3 \leq \tau_1$, tenemos el caso llamado heterozigoto superior, muy frecuente en los procesos reales, en los cuales la selección natural favorece la mezcla de razas.

Si $\tau_3 \leq \tau_1 < \tau_2$ ó $\tau_1 \leq \tau_3 < \tau_2$, estamos en el caso heterozigoto inferior: la selección natural actúa contra la raza mixta, favoreciendo las razas puras AA y aa. Según una comunicación personal del profesor Fleming, este caso se presenta en algunas especies vegetales cuando las razas puras representan características extremadamente opuestas, como adaptación a condiciones desérticas y adaptación a condiciones de gran humedad, o adaptación al frío y adaptación al calor, etc. Este es el caso al que podremos aplicar nuestros resultados.

$$\text{Definamos } m = \frac{\tau_2 - \tau_1}{2\tau_2 - \tau_1 - \tau_3}$$

Tras ciertas normalizaciones llegamos a

$$(2) \quad \frac{\partial p}{\partial t} = r\Delta p + p(1-p)(p-m)$$

y la hipótesis de inferioridad del heterozigoto se refleja en el hecho de que m satisface $0 < m < 1$. Por el principio del máximo, toda solución estacionaria $p(x)$ de (2)

satisface $0 \leq p(x) \leq 1$, que es precisamente la restricción física de este problema (p representa la frecuencia).

Llamemos $b = \frac{1}{2} - m$; (2) se convierte en

$$(3) \quad \frac{\partial p}{\partial t} = r \Delta p + p(1-p)(p - \frac{1}{2} + b).$$

Sea p una solución estacionaria de (3); definamos $\tilde{p} = p - \frac{1}{2} + b$; entonces, \tilde{p} satisface $\frac{\partial \tilde{p}}{\partial n} = 0$ en $\partial \Omega$ y

$$(4) \quad -r \Delta \tilde{p} = (\tilde{p} + \frac{1}{2} - b)(\frac{1}{2} - \tilde{p} + b) = (\frac{1}{4} - b^2)\tilde{p} + 2b\tilde{p}^2 - \tilde{p}^3.$$

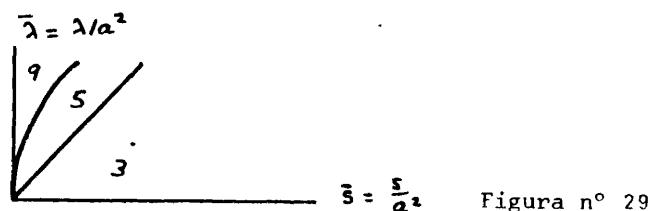
Sea ahora $\tilde{p} = \delta u$. Entonces

$$-r \delta \Delta u = (\frac{1}{4} - b^2)\delta u + 2b\delta^2 u^2 - \delta^3 u^3.$$

Dividiendo por δ y designando $\delta^2/r = 1$, $(\frac{1}{4} - b^2)\frac{1}{r} = \lambda > 0$, obtenemos

$$(6) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u + 2b(\frac{1}{4} - b^2)^{-\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}} u^2 - u^3 & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{en } \partial \Omega \end{cases}$$

Si b (que depende sólo del aspecto genético) permanece fijo y la tasa de migración r es suficientemente grande, entonces λ es pequeño y podemos aplicar los resultados del Capítulo VII. En particular, si fijamos λ y b podemos utilizar el diagrama de bifurcación correspondiente a λ , a $\stackrel{\text{def}}{=} 2b(\frac{1}{4} - b^2)^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}}$ fijo para $\lambda > 0$ (pues $b^2 < \frac{1}{4}$, debido a la hipótesis de inferioridad heterozigótica);



Vemos así que si ϵ es suficientemente pequeño hay nueve soluciones, cuatro de las cuales son estables; y corresponden a distribuciones de frecuencia próximas a 1 ó 0 en Ω_0^R y Ω_0^L (no necesariamente constantes en Ω_ϵ). Las soluciones inestables son las que se encuentran próximas al valor intermedio m en Ω_0^R ó Ω_0^L .

Cuando ϵ alcanza un cierto valor crítico, dado aproximadamente por

$$\lambda_\epsilon = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{a^2} = \frac{1}{2} \frac{\lambda(1-b^2)}{4b^2}$$

el número de soluciones se reduce a cinco: las dos soluciones estables no homogéneas desaparecen, y permanecen las tres distribuciones homogéneas, junto con dos soluciones no homogéneas inestables. Y cuando $\lambda_\epsilon = \lambda$, éstas dos soluciones no homogéneas inciden con $p=m$, y solamente quedan las soluciones homogéneas. Gráficamente

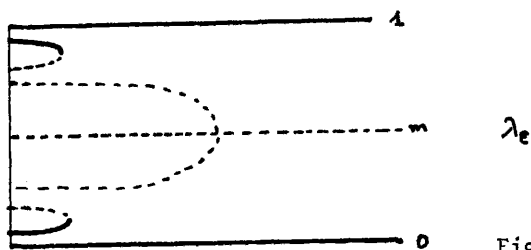


Figura n° 30

Si $m = \frac{1}{2}$, es decir, las tasas de mortalidad de los genotipos aa y AA son idénticas, el diagrama de soluciones es

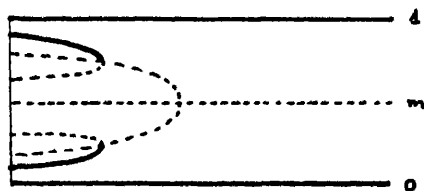


Figura n° 31

Podemos interpretar estos resultados de la siguiente forma: supongamos que hay dos islas Ω_0^R y Ω_0^L en las cuales el proceso de selección natural ha actuado de forma que en Ω_0^R toda la población es de tipo AA, mientras que en Ω_0^L toda la población es de tipo aa. (esta hipótesis es perfectamente realista, pues, por la hipótesis de inferioridad del heterocigoto, la población tenderá a estabilizarse alrededor de una de las razas puras). Si construimos un pequeño puente entre ambas islas, observaremos una distribución de genotipos prácticamente idéntica: casi todos los individuos en Ω_0^R son AA, y casi todos en Ω_0^L son aa. Al aumentar la amplitud del puente, esta distribución pier-

de estabilidad y, aunque persisten ciertas distribuciones no homogéneas, éstas son inestables, y sólo observaremos, eventualmente, una distribución homogénea: todos los individuos del grupo de las dos islas más el puente, es decir, Ω_{ϵ} , son de una raza pura única.

Nota: El análisis llevado a cabo requiere que $\frac{1}{4}-b^2$ sea pequeño, de forma que $\bar{\lambda} = \lambda/a^2 \approx (\frac{1}{4}-b^2)/4b^2$, $\bar{s} = s/a^2 \approx s(\frac{1}{4}-b^2)/4b^2\lambda$ se halle en el rango de validez del diagrama de bifurcación.

CAPITULO IX

GENERALIZACIONES Y PROBLEMAS ABIERTOS

Una de las cuestiones abiertas planteadas por el problema que hemos considerado es la siguiente: "¿Cuál es la clase más general de dominios Ω_ε para la cual se satisface el Teorema IV.1.1 sobre regularidad de las Ecuaciones de Bifurcación?" Es decir, ¿es posible dar una serie de condiciones sobre Ω_ε que garantice la aplicabilidad de los métodos y resultados de los capítulos III y IV?

Una respuesta parcial a esta cuestión aparece en Hale y Vegas [18], donde se demuestra el siguiente resultado:

Sea Ω_ε una familia creciente de dominios regulares y conexos con las siguientes propiedades:

- 1) Ω_0 es la unión de dos dominios conexos, acotados y regulares cuyas clausuras son disjuntas.
- 2) La función $\varepsilon \mapsto |\Omega_\varepsilon|$ es continua en $[0,1]$.
- 3) $\lambda^{(3)}(\Omega_\varepsilon)$ está acotado inferiormente por una constante estrictamente positiva.
- 4) $\int_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0} w_\varepsilon^2 \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, donde w_ε representa cualquier autofunción normalizada para $\lambda_\varepsilon = \lambda^{(2)}(\Omega_\varepsilon)$.

- 5) Existe una familia de operadores de extensión E_ϵ tales que $\|E_\epsilon\| \leq C(\epsilon)$, donde $C(\cdot)$ es acotada en intervalos compactos de $(0,1)$.

Entonces, los resultados del Capítulo V (el caso hiperbólico) se satisfacen.

Por otra parte, estas hipótesis no parecen ser suficientes para demostrar la continuidad en ϵ de las derivadas de orden superior; como se observó en el Capítulo IV, éstas requieren estimaciones muy precisas de las autofunciones, normas L^p , etc., y no parece claro qué tipo de condiciones abstractas pueden garantizarlas.

La propiedad (3) se manifiesta como la crucial para aplicar el método de Liapunov-Schmidt (con dos parámetros), por lo cual hay que imponerla como parte de las hipótesis. El ejemplo siguiente, inspirado en uno análogo en Courant y Hilbert [9], muestra una familia de dominios para la cual $|\Omega_\epsilon \setminus \Omega_0| \rightarrow 0$, y $\lambda^{(3)}(\Omega_\epsilon) \rightarrow 0$, es decir, (3) no se cumple:

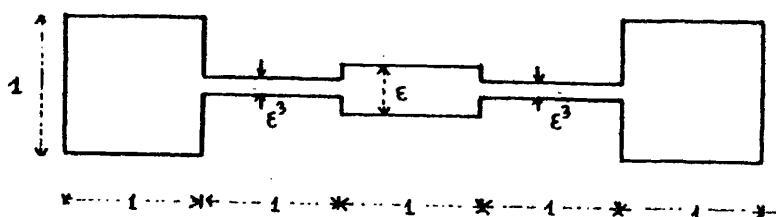


Figura n° 32

Por simetría, $\lambda^{(3)}(\Omega_\epsilon)$ es igual a $\lambda^{(2)}(G_\epsilon)$, donde G_ϵ es el "semidominio"

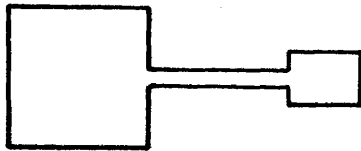


Figura n° 33

Y es fácil ver (Courant y Hilbert [9]) que $\lambda^{(2)}(G_\epsilon) \rightarrow 0$, usando la caracterización variacional de los autovalores.

La propiedad (4) es consecuencia de las anteriores si Ω_ϵ es simétrico; esto se demuestra también en Hale y Vegas [18].

La propiedad (5) tiene un carácter técnico, pero pone de manifiesto un hecho importante, que, en parte, hace que el problema que hemos tratado no pueda estudiarse con los métodos típicos de perturbaciones de dominios; para la clase de dominios construida en el Capítulo III no existe ninguna familia de operadores de extensión que estén uniformemente acotados cuando $\epsilon \rightarrow 0$; pues tal propiedad implicaría que las inclusiones de Sobolev $H^1(\Omega_\epsilon) \hookrightarrow L^p(\Omega_\epsilon)$ son uniformemente acotadas, lo cual es imposible por el siguiente contraejemplo: Sea $v \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } v \subset (-1, 1)$; definamos $v_\epsilon = \epsilon^{-\frac{1}{2}} v$. Entonces $\|v_\epsilon\|_{H^1(\Omega_\epsilon)}$ es constante con ϵ , mientras que $\|v_\epsilon\|_{L^p(\Omega_\epsilon)} \rightarrow \infty$ si $p > 2$.

BIBLIOGRAFIA

1. Abraham, R. y Robin, J.: Transversal Mappings and Flows. W. A. Benjamin, New York, 1967.
2. Adams, R. A.: Sobolev Spaces, Academic Press, New York 1975.
3. Agmon, S.: Lectures on Elliptic Boundary Value Problems, Van Nostrand Co., Princeton, NJ, 1965.
4. Agmon, S., Douglis, A. y Nirenberg, L.: Estimates near the boundary for elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, I, Comm. Pure Appl. Math. 12, 623-727 (1959).
5. Aronson, D. G. y Weinberger, H. F.: Nonlinear diffusion in population genetics, combustion and nerve pulse propagation, Proceedings of the Tulane Program in partial differential equations, Lecture Notes in Mathematics, 446, Springer Verlag 1975.
6. Berger, M.: Nonlinearity and Functional Analysis, Academic Press, New York, 1977.
7. Casten, R. G. y Holland, C.J.: Instability results for reaction diffusion equations with Neumann boundary conditions, J. Differential Equations, 27, 266-273 (1978).
8. Chow, S. N., Hale, J. K. y Mallet-Paret, J.: Applications of generic bifurcation, II, Arch. Rat. Mech. Anal., 62, (3), 209-235 (1976).
9. Courant, R. y Hilbert, D.: Methods of Mathematical Physics, Interscience, 1962.
10. Ewens, W. J.: Mathematical Population Genetics, Biomathematics, vol. 9. Springer Verlag, 1979.
11. Fife, P. C.: Mathematical Aspects of Reacting and Diffusing Systems, Lecture Notes in Biomathematics, 28 Springer Verlag, 1979.
12. Fleming, W.: A selection-migration model in population genetics, J. Math. Biol., 2, 219-233 (1975).

13. Fleming, W. y Su, H.: Some one dimensional migration models in population genetics theory, Theo. Popu. Biol., 5, 431-449 (1974).
14. Friedman, A.: Partial Differential Equations, R. E. Krieger Publishing Co., New York, 1976.
15. Fujiwara, D. y Ozawa, S.: The Hadamard variational formula for the Green functions on some normal elliptic boundary value problems, Proc. Japan Acad., 54 ser. A, 215-220 (1978).
16. Grigorieff, R. D.: Diskret Kompakte Einbettungen in Sobolewschen Räumen, Math. Ann., 197, 71-85 (1972).
17. Hale, J. K.: Stability and bifurcation in a parabolic equation, Proc. Symp. Dynamical Systems, Warwick, 1980. Aparecerá.
18. Hale, J. K. y Vegas, J.: A nonlinear parabolic equation with varying domain. Preprint.
19. Hoppensteadt, F. C.: Mathematical Methods in Population Biology, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 1976.
20. Krasnosel'skii, M. A.: Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations, Pergamon, Oxford, 1965.
21. Lions, J. L. y Magenes, E.: Inhomogeneous Boundary Value Problems and Applications, I, Springer Verlag, 1972.
22. Lobo-Hidalgo, M. y Sánchez-Palencia, E.: Sur certaines propriétés spectrales des perturbations du domaine dans les problèmes aux limites, Comm. in Partial Differential Equations, 4 (10), 1085-1098 (1979).
23. Matano, H.: Asymptotic behavior and stability of solutions of semilinear diffusion equations, Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ., 15, 401-454 (1979).
24. Nagylaki, T.: Conditions for the existence of clines. Genetics, 80, 595-615 (1975).
25. Nečas, J.: Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques, Academia, Editions de l'Académie Tchecoslovaque des Sciences, Prague, 1967.

26. Rauch, J.: Stability of motion for semilinear equations, Proceedings of the NATO Advanced Study Institute, Series C, vol. 29, 319-358 (1976).
27. Rauch, J. y Taylor, M.: Potential and Scattering theory on wildly perturbed domains, J. Functional Analysis, **18**, 27-59 (1975).
28. Stein, E.: Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1979.
29. Stummel, F.: Perturbation theory for Sobolev spaces, Proc. Royal Soc. Edinburgh, **73 A**, 5-49 (1974/75).
30. Stummel, F.: Perturbation of domains in elliptic boundary value problems, Lecture Notes in Mathematics, **502**, Springer Verlag, 110-136 (1976).
31. Babuška, I. y Výborný, R.: Continuous dependence of the eigenvalues on the domain, Czechoslovak Math. J., **15**, 169-178 (1965).
32. Chafee, N.: Asymptotic behavior for solutions of a one-dimensional parabolic equation with homogeneous Neumann boundary conditions, J. Differential Equations, **18**, 111-134 (1975).

